

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MODELAGEM PROBABILÍSTICA DE FONTES EÓLICAS  
DE ENERGIA INTEGRADAS EM SISTEMA DE  
POTÊNCIA CONVENCIONAL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA

GERMÁN WILFREDO HERRERA DALENCE

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 1990

MODELAGEM PROBABILÍSTICA DE FONTES EÓLICAS DE ENERGIA  
INTEGRADAS EM SISTEMA DE POTÊNCIA CONVENCIONAL

GERMÁN WILFREDO HERRERA DALENCE

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

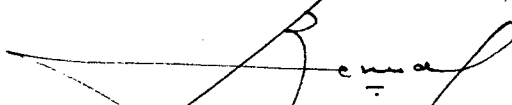
MESTRE EM CIÊNCIAS

ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Hans Helmut Zürn, Ph. D.

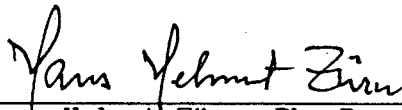
ORIENTADOR



Prof. José Carlos Moreira Bermudez, Ph. D.

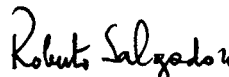
Coordenador do Curso Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica

BANCA EXAMINADORA

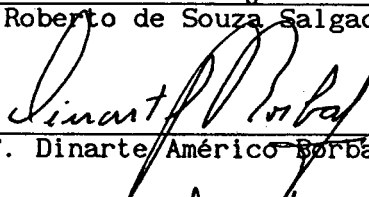


Prof. Hans Helmut Zürn, Ph. D.

PRESIDENTE



Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph. D.



Prof. Dinarte Américo Borba, M. Sc.



Prof. Jorge Coelho, M. Eng.

À Mónica, minha esposa.

A Germán, meu filho.

A Wilfredo e Maria, meus pais.

A meus irmãos.

### AGRADECIMENTOS

Ao professor Hans Helmut Zörn, pela sua orientação, amizade e inestimável ajuda prestada na realização do trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao Laboratório de Sistemas de Potência, LABSPOT, pelos recursos computacionais prestados.

## ÍNDICE

	Página
NOTAÇÃO	1
RESUMO	2
ABSTRACT	3
CAPÍTULO I - <u>INTRODUÇÃO</u>	4
CAPÍTULO II - <u>MODELO ESTOCÁSTICO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA</u>	
2.1. Introdução	7
2.2. Modelo das Funções Distribuição de Probabilidade da Demanda e Funções Densidade	8
2.3. Modelo das Funções de Disponibilidade de Potência das Unidades Geradoras	11
2.4. Funções Modificadas de Distribuição e Densidade da Demanda Não Atendida	13
2.5. Probabilidade de Perda de Carga e Duração Esperada da Demanda Não Atendida	17

2.6. Custo Esperado de Produção de Energia	18
--	----

**CAPÍTULO III - MODELO ESTOCÁSTICO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA CONSIDERANDO**  
**FONTE NÃO CONVENCIONAL DE ENERGIA. ENERGIA EÓLICA**

3.1. Introdução	23
3.2. Modelo das Funções Distribuição de Probabilidade que Relaciona a Velocidade do Vento com a Potência de Saída da Turbina	24
3.2.1. Modelo das Turbinas de Vento	24
3.2.2. Potência de Saída Univariada da Turbina de Vento	27
3.2.3. Modelo da Potência de Saída Bivariada da Turbina do Vento	28
3.3. Modelo das Funções de Disponibilidade de Potência de Um e Dois Sistemas Eólicos	30
3.3.1. Introdução	30
3.3.2. Modelo da Função Disponibilidade de Um Sistema Eólico	31
3.3.3. Modelo da Função Disponibilidade de Dois Sistemas Eólicos	31
3.4. Modelo da Função Probabilidade da Potência Disponível	32
3.4.1. Modelo da Função Probabilidade de Potência Disponível de Um Sistema Eólico	32
3.4.2. Modelo da Função Probabilidade de Potência Disponível de Dois Sistemas Eólicos	34
3.5. Formas de Inclusão de Sistemas Eólicos no Modelo Estocástico de Produção de Energia	37

3.5.1. Inclusão de Sistemas Eólicos sem Correlação Com a Potência de demanda	37
3.5.2. Sistemas Eólicos Correlacionados com a Demanda	38

#### CAPÍTULO IV - SOLUÇÕES DO MODELO ESTOCÁSTICO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA

4.1. Introdução	41
4.2. Exemplificação de Um Sistema Eólico	42
4.2.1. Introdução	42
4.2.2. Função Distribuição de Probabilidade Univariada da Potência de Saída	42
4.2.3. Função Densidade de Disponibilidade de Um Sistema Eólico	43
4.2.4. Função Distribuição de Probabilidade de Potência Disponível de Um Sistema Eólico	45
4.3. Exemplificação de Dois Sistemas Eólicos	51
4.3.1. Introdução	51
4.3.2. Função Densidade Bivariada da Potência de Saída da Turbina do Vento	51
4.3.3. Função Densidade de Disponibilidade de Dois Sistemas Eólicos	52
4.3.4. Função Densidade de Probabilidade de Potência Disponível de Dois Sistemas Eólicos	53
4.4. Função Densidade de Potência de Demanda Não Suprida pela Potência do Vento	55



4.5. Estudo de Sensibilidade dos Parâmetros	61
4.5.1. Redução do Custo Esperado de Produção de Energia	69
4.5.2. Correlação da Potência Eólica com a Demanda	70
4.6. Estudo de Sensibilidade dos parâmetros	71
4.6.1. Introdução	71
4.6.2. Sensibilidade à Indisponibilidade Forçada das Unidades Eólicas	71
4.6.3. Probabilidade da Indisponibilidade por Falta de vento	73
 CAPÍTULO V <u>CONCLUSÕES</u>	 76
 BIBLIOGRAFIA	 78
 APÊNDICE A. <u>DADOS DO SISTEMA DE POTÊNCIA</u>	 81
 APÊNDICE B. <u>FUNÇÕES E APLICAÇÕES USUAIS</u>	 97

## NOTAÇÃO

$Pr \{ . \}$	= probabilidade do evento $\{ . \}$
$V$	= velocidade do vento
$V_n$	= velocidade nominal
$V_m$	= velocidade máxima ou "cut-out"
$V_i$	= velocidade mínima ou "cut-in"
$P(V)$	= potência elétrica de uma unidade eólica
$f(.)$	= função densidade de probabilidade
$P(.)$	= função probabilidade
$C$	= capacidade de um aproveitamento eólico
$D(.)$	= função disponibilidade de capacidade
$F(.)$	= função distribuição de probabilidade
$G(.)$	= função distribuição complementar de probabilidade

MODELAGEM PROBABILÍSTICA DE FONTES EÓLICAS  
DE ENERGIA INTEGRADAS EM SISTEMA DE  
POTÊNCIA CONVENCIONAL

RESUMO

Este trabalho descreve o modelo que permite incluir fontes não convencionais de energia em um modelo estocástico de produção de fontes convencionais. Considera-se inicialmente o sistema eólico estatisticamente independente da potência de demanda.

Estuda-se posteriormente a correlação entre dois sistemas eólicos através de uma distribuição conjunta de vento. O sistema eólico conjunto é então submetido ao modelo estocástico de produção de energia, considerando independência entre a demanda e vento. Finalmente estuda-se a correlação entre um ou mais sistemas eólicos com a potência de demanda.

PROBABILISTIC MODELING OF WIND ENERGY SOURCES  
INTEGRATED IN A CONVENTIONAL POWER SYSTEM

ABSTRACT

This work describes a model capable of including non - conventional energy sources into a stochastic energy production model for conventional power sources. A wind energy system is initially considered as statistically independent of the hourly demand.

The correlation between two wind systems is then considered by means of a joint wind speed distribution. The joint wind system is thereafter submitted to the stochastic energy production model considering independence between demand and wind speed. Finally the correlation wind systems and the hourly demand is studied.

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Sendo as chamadas fontes de energia não convencional uma alternativa do planejamento da expansão e operação de um sistema de potência, o presente trabalho visa introduzir a energia não convencional, notadamente energia eólica, num sistema de fontes convencionais de energia, considerando as incertezas da potência de demanda, disponibilidade das unidades geradoras e velocidade do vento, assim como as hipóteses de independência da potência da demanda com a potência eólica e de correlação entre as mesmas.

Tradicionalmente na literatura adota-se o aproveitamento eólico como sendo uma fonte não correlacionada com a demanda, [6], [4] e não se considera mais de um sistema eólico junto ao sistema convencional. Costuma-se gerar valores seqüenciais da velocidade do vento baseados na função densidade Rayleigh [7], [5], modela-se a curva de potência de saída da turbina de vento como uma função quadrática com a velocidade do vento, [8], [5]. Considera-se igualmente num sistema eólico, (fazenda de vento), a correlação total entre as unidades geradoras, [4], entretanto não se faz menção à correlação parcial entre diferentes aproveitamentos eólicos.

O presente trabalho pretende apresentar a inclusão de um ou mais

aproveitamentos eólicos, num modelo estocástico de produção de energia, considerando em primeira instância a hipótese de independência da potência da demanda com a potência eólica. Introduzindo-se posteriormente dois sistemas eólicos correlacionados entre si no sistema de fontes convencionais de energia, avalia-se a correlação entre os sistemas eólicos através da função densidade conjunta Rayleigh.

Também se considera a correlação da potência da demanda com a potência eólica, efetuando-se um tratamento distinto para avaliar a energia eólica. Neste sentido se tem em conta aproveitamentos eólicos correlacionados entre si e ao mesmo tempo correlacionados com a potência de demanda.

O Capítulo II, apresenta o modelo estocástico de produção de fontes convencionais de energia usado neste trabalho, salientando os índices de confiabilidade, assim como o custo esperado de produção de energia, considerando o caráter aleatório da potência de demanda e a disponibilidade das unidades geradoras convencionais.

O Capítulo III, descreve a metodologia usada para incorporar o sistema eólico como fonte não convencional ao modelo estocástico de produção de energia, com consideração da hipótese de independência entre a potência de demanda e a potência eólica, sendo submetida diretamente ao modelo estocástico de produção de energia com as demais unidades convencionais.

O Capítulo IV, exemplifica a teoria apresentada no capítulo III mostrando resultados da potência disponível de um e dois sistemas eólicos estatisticamente independentes da demanda, assim como a obtenção da demanda não suprida pela potência do vento a partir das curvas cronológicas diárias de demanda e potência eólica. Essa demanda não suprida pelo sistema eólico é então submetida ao modelo estocástico de produção de energia das fontes convencionais, para obtenção dos índices de desempenho do sistema composto.

O Capítulo V, apresenta as conclusões e sugestões para futuros

trabalhos.

O Apêndice A, ilustra os dados do sistema de potência considerando a curva duração de demanda, a disponibilidade das unidades geradoras e as saídas do modelo estocástico.

O Apêndice B, ilustra algumas funções de densidade e operações com variáveis aleatórias usadas neste trabalho.

## CAPÍTULO II

### MODELO ESTOCÁSTICO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA

#### 2.1.- INTRODUÇÃO

O modelo estocástico do sistema de potência para planejamento da expansão e operação apresentado têm como principal objetivo avaliar o custo de produção esperado de cada unidade geradora, considerando o caráter aleatório tanto da potência da demanda como das disponibilidades da potência de geração, e as características de produção entrada-saída não lineares de cada unidade geradora. O algoritmo do custo de produção foi desenvolvido por Slater [3], baseado no trabalho de Booth [1] e Balériaux [2].

Através da operação linear de convolução da função de distribuição da demanda e das funções densidade de disponibilidade de potência das unidades, é possível obter a função distribuição de demanda modificada capaz de proporcionar os índices de confiabilidade úteis na avaliação da continuidade de atendimento de sistemas de potência, tais como a duração esperada da demanda não atendida, a probabilidade de perda de carga e a energia esperada não atendida, assim como o custo de produção de energia produzida. A nomenclatura deste capítulo baseia-se no trabalho de H. Zürn,



[11] e [14].

## 2.2.- MODELO DAS FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DA DEMANDA E FUNÇÕES DENSIDADE

A curva de duração demanda mostrada na Figura 2-1 é geralmente utilizada para fornecer as previsões de demanda num determinado período. Em nosso caso são utilizadas curvas de duração de demanda para dias típicos, divididos em dias úteis e de fim de semana.

A função distribuição de probabilidade de demanda  $G_d(P_d)$  é obtida pela simples troca de eixos e normalização da variável tempo na curva duração demanda, conforme ilustrado na Figura 2-2, sendo definida pela probabilidade:

$$G_d(P_{d_k}) = \Pr(P_d > P_{d_k}), \quad (2.1)$$

onde  $P_{d_k}$  é a variável aleatória potência de demanda e  $P_d$  é a potência de demanda ao nível  $k$ .

A função distribuição definida pela equação 2.1 é decrescente, diferindo das funções ordinárias de distribuição de probabilidade, que são crescentes; esta forma é conveniente nesta linha de trabalho, devido ao grande interesse que se tem na cauda final de alta potência e pequena duração da função distribuição, onde,

$$f_d = - \frac{dG_d}{dP_d} \quad (2.2)$$

é a função densidade de probabilidade de demanda, igual à derivada negativa

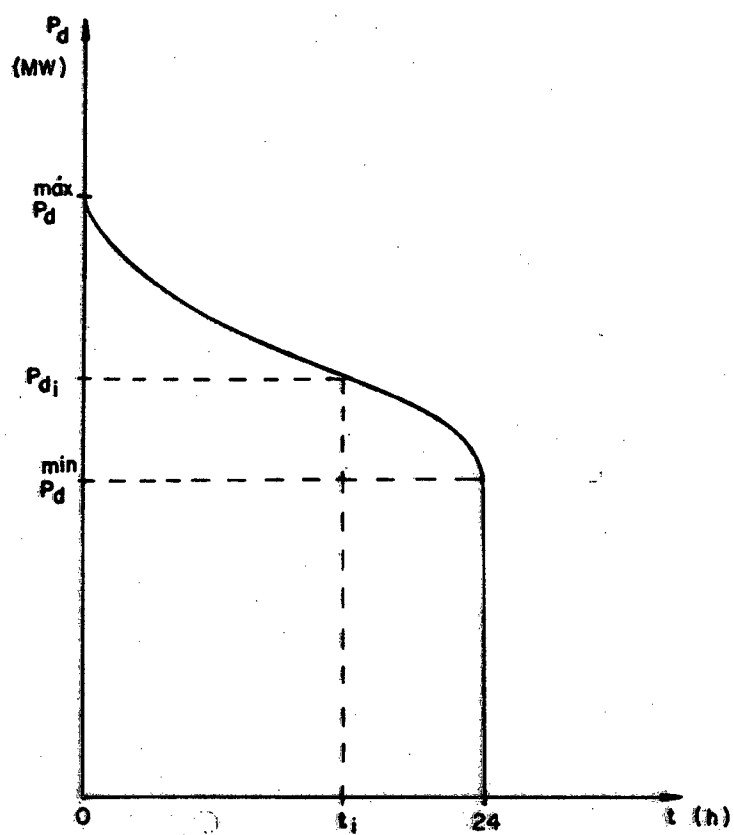


FIGURA 2-1. Curva duração de demanda

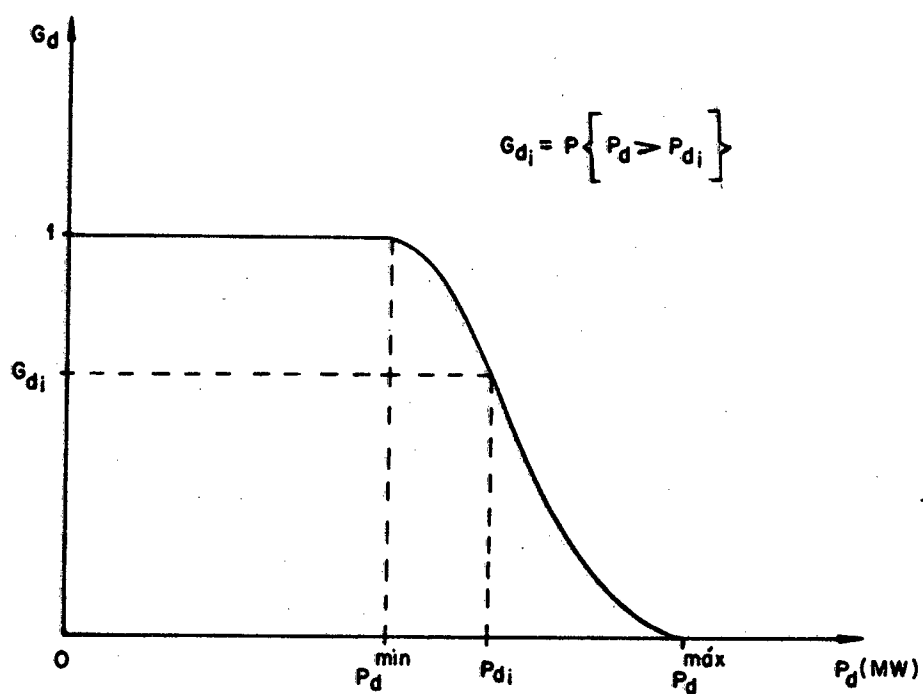


FIGURA 2-2. Função distribuição de probabilidade de demanda

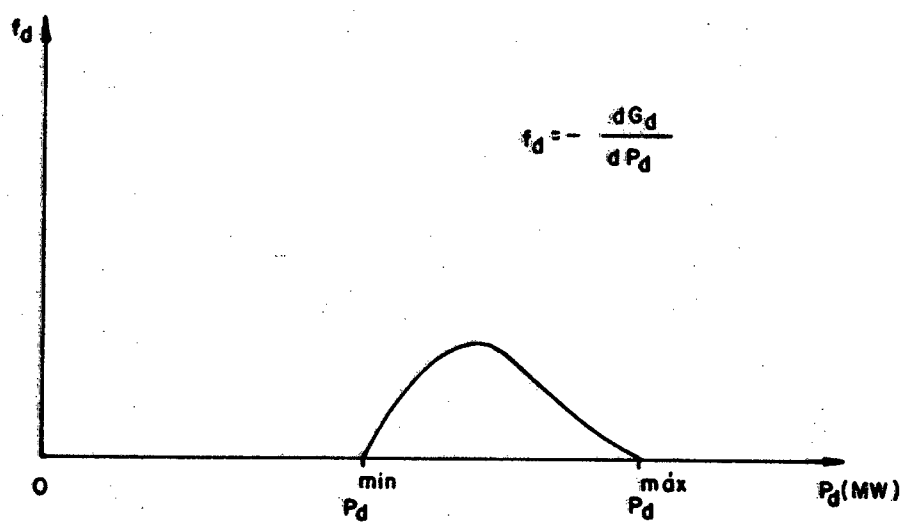


FIGURA 2-3. Função densidade de probabilidade de demanda

da função distribuição de probabilidade de demanda em relação à potência de demanda, conforme ilustrado na Figura 2-3.

Como na prática as demandas são planejadas numa base horária, a função duração-demanda  $P_d(t)$  é discreta. Portanto  $G_d(P_d)$  e  $f_d(P_d)$  são também discretas, com degraus de potência variáveis. Por conveniência computacional é feita então uma conversão para passos constantes de potência  $\Delta P$ , deste modo, quanto menor o passo  $\Delta P$ , maior será o número de passos, por conseguinte maior o tempo computacional.

Com a transformação da função distribuição de demanda numa função escada,  $G_d^*(P_d)$ , (ver Figura 2-4), a função densidade torna-se um trem de impulsos,  $f_d^*(P_d)$ , como mostra a Figura 2-5.

### 2.3.- MODELO DAS FUNÇÕES DE DISPONIBILIDADE DE POTÊNCIA DAS UNIDADES GERADORAS

A disponibilidade de uma unidade geradora é a probabilidade da mesma estar gerando num determinado instante de tempo [13].

O modelo probabilístico a dois estados aplicado às unidades geradoras, reúne toda faixa de operação da unidade em somente um estado operacional, correspondente à potência nominal da unidade. Pode-se adotar este modelo para unidades hidroelétricas em geral, bem como para unidades geradoras que operem em base. Entretanto, convém ampliar a definição para unidades geradoras de grande porte que tem uma ampla faixa de operação. A disponibilidade pode ser considerada como a múltiplos estados de operação para uma unidade geradora, pois observou-se que a probabilidade de falha aumenta quando a unidade entrega mais potência ao sistema. Então a função distribuição de disponibilidade de potência discreta da unidade de geração é definida como segue:

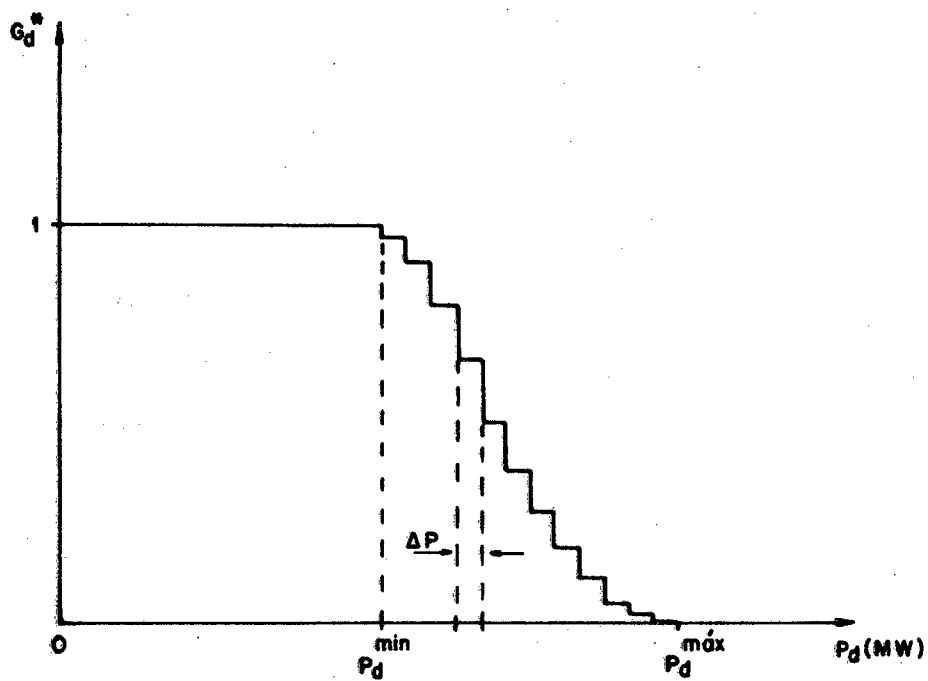


FIGURA 2-4. Função distribuição de demanda discreta

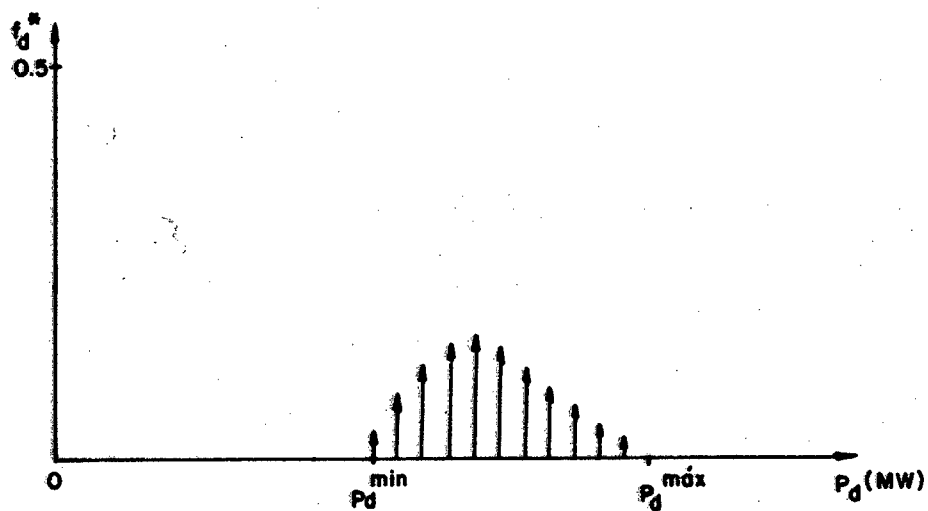


FIGURA 2-5. Função densidade de demanda discreta

$$G_u(P_{u_k}) = \Pr \{P_u > P_{u_k}\} \quad (2.3)$$

onde  $P_u$  é a variável aleatória potência de saída da unidade de geração e  $P_{u_k}$  é a potência de saída da unidade no nível k. Na prática usa-se funções distribuição de disponibilidade de potência discretas. Com isto, as funções densidade serão impulsivas, conforme mostram as Figuras 2-6 a 2-7, para funções de dois estados e 2-8 a 2-9 para funções de múltiplos estados.

#### 2.4.- FUNÇÕES MODIFICADAS DE DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE DA DEMANDA NÃO ATENDIDA

Seja  $P_{dna}$  a potência de demanda não atendida em MW, relacionada à  $P_d$ , potência de demanda e  $P_g$ , potência de geração, por:

$$P_{dna} = P_d - P_g \quad (2.4)$$

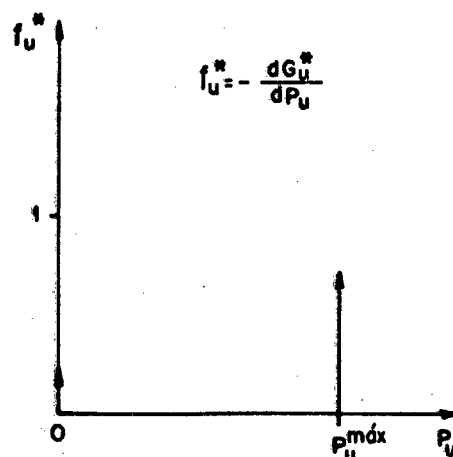
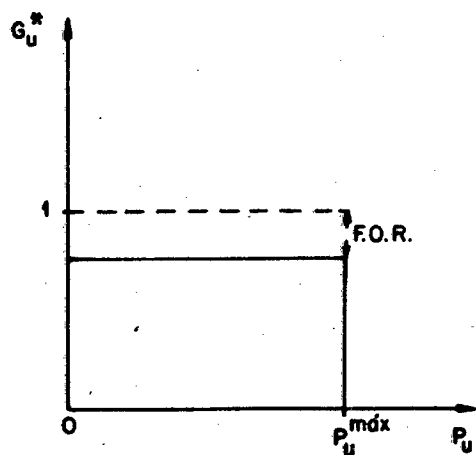
onde

$$P_g = \sum_i P_{u_i} \quad (2.5)$$

e  $P_{u_i}$  é aquele definido na seção anterior.

Fazendo uso de relações recorrentes dos sucessivos carregamentos das unidades pela combinação das equações (2.4) e (2.5), isto é,

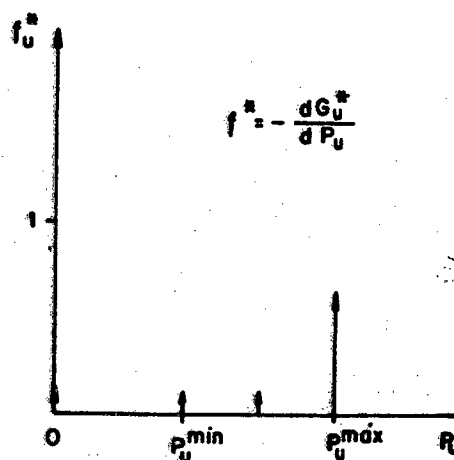
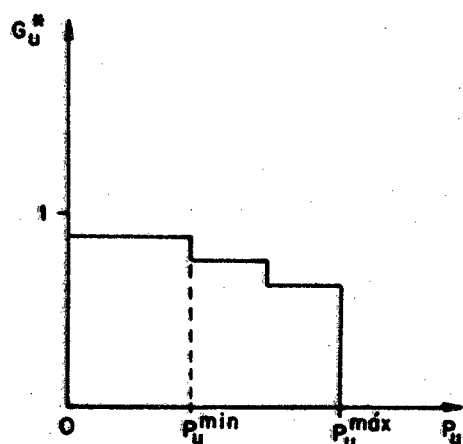
$$P_{dna_i} = P_{dna_{i-1}} - P_{u_i} \quad (2.6)$$



## DOIS ESTADOS

FIGURA 2-6. Função distribuição  
de disponibilidade  
da unidade

FIGURA 2-7. Função densidade  
de disponibilidade  
da unidade



## MÚLTIPLOS ESTADOS

FIGURA 2-8. Função distribuição  
de disponibilidade  
da unidade

FIGURA 2-9. Função densidade  
de disponibilidade  
da unidade

onde  $P_{dna_i}$  é a demanda não atendida após sucessivos carregamentos de todos os geradores incluindo o gerador  $i$ . O valor inicial para  $P_{dna_i}$  é a própria demanda, isto é,

$$P_{dna_0} = P_d \quad (2.7)$$

Obviamente, após o carregamento da última unidade a demanda não atendida deve coincidir com a equação (2.4), independentemente da ordem de carregamento.

A avaliação da demanda não atendida com o progressivo carregamento de mais geradores torna possível calcular a contribuição individual da unidade em cada ordem de carregamento dada. Isto é de fundamental importância para o cálculo do custo mínimo de produção de geração esperada.

Como  $P_{dna}$ ,  $P_g$  e  $P_{dna_i}$  são funções lineares das variáveis aleatórias independentes  $P_{u_i}$  e  $P_d$  como foi indicado nas equações (2.4) a (2.6), as funções distribuição de probabilidade são obtidas diretamente pela convolução e deconvolução das funções distribuição de demanda correspondentes com as funções densidade de disponibilidade de potência das unidades. A Figura 2-10 ilustra a forma das funções de distribuição de probabilidade de: demanda, demanda modificada, demanda não atendida. Note que embora a capacidade de geração nominal disponível seja suficiente para atender a demanda, existe uma probabilidade diferente de zero de que o sistema falhe ao atender a demanda considerada, supondo que todas as unidades estão sujeitas a saídas forçadas. Isto é claramente indicado pela distribuição de demanda modificada que se



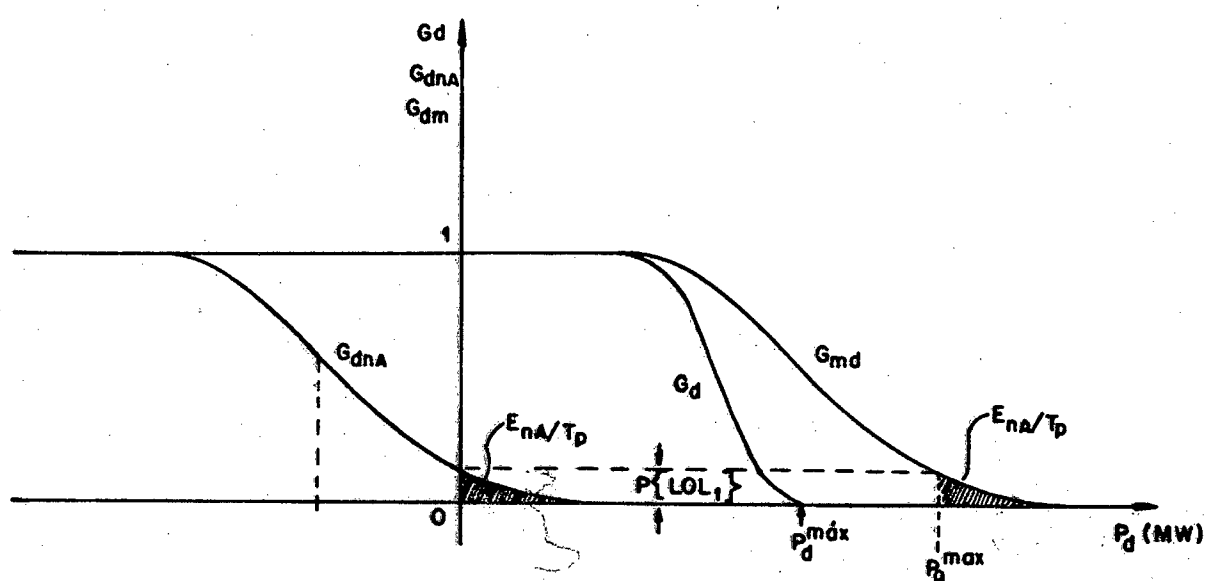


FIGURA 2-10. Funções distribuição da demanda

$G_d$  Função distr. de demanda

$G_{dm}$  Função distr. de demanda modificada

$G_{dna}$  Função distr. de demanda não atendida

LOLP Probabilidade de perda de carga

ENA Energia não atendida

distribuição de demanda não atendida, através da observação de como esta função é definida para o semi-eixo positivo de potência.

## 2.5.- PROBABILIDADE DE PERDA DE CARGA E DURAÇÃO ESPERADA DE DEMANDA NÃO ATENDIDA

A probabilidade de perda de carga LOLP , também conhecida como a probabilidade de falha no suprimento da demanda [3], é o índice de confiabilidade mais usado em geração de potência.

A probabilidade de perda de carga é a probabilidade de que a demanda não possa ser atendida durante um considerado intervalo de tempo para o qual a distribuição de demanda é dada por  $G_d(P_d)$  e a função densidade de disponibilidade de geração é dada por  $f_g(P_g)$ , [14], isto é,

$$P \{LOL_1\} = \int G_d(P) f_g(P) dP \quad (2.8)$$

Este valor é igual ao valor da função distribuição de demanda não atendida na origem, ou ainda o valor da função distribuição de demanda modificada em  $P_g^{\max}$ , isto é,

$$P \{LOL_1\} = G_{dna}(0) = G_{dm}(P_g^{\max}) \quad (2.9)$$

Contudo, considerando que um intervalo típico de interesse deve ter várias distribuições representativas de demanda, por exemplo, dias da semana

típicos, sábados e domingos, para cada um dos quais resultando diferentes probabilidades de perda de carga, deve-se completar a perda de carga esperada para o período. Este valor esperado pode ser melhor interpretado como a duração total esperada de perda de carga, do que uma probabilidade de demanda não atendida, sendo então chamado de "Duração esperada de demanda não atendida" DEDNA ou perda de carga esperada LOLE, simbolizado por  $\rho_{ddna}$ , isto é,

$$\rho_{ddna} = E \{ P \{ LOL_1 \} \}_{\text{período}} = LOLE \quad (2.10)$$

A perda de carga esperada e a duração esperada de demanda não atendida, podem ser formalmente expressas em termos de dias/período, dias/ano, etc, mostrando uma conveniente ordem de magnitude para este índice.

## 2.6.- CUSTO ESPERADO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA

A minimização do custo esperado de produção de energia baseia-se no custo esperado de produção de energia referente às unidades geradoras térmicas e ao custo correspondente às compras de energia que o sistema não é capaz de atender.

Para obter o custo esperado de produção de energia o modelo proposto considera a não linearidade do custo de combustível para produção de energia ( $\phi_i$ ) versus características de potência ( $P_{u_i}$ ), ver Figura 2-11, isto é,

$$\phi_i (P_{u_i}) = \alpha_{i_0} + \alpha_{i_1} P_{u_i} + \alpha_{i_2} P_{u_i}^2 \quad (2.11)$$

A função custo incremental, ilustrada na Figura 2-12, é:

$$\lambda_i (P_{u_i}) = \frac{d\phi_i}{dP_{u_i}} = \alpha_{i1} + 2 \alpha_{i2} P_{u_i} \quad (2.12)$$

Tendo em vista que o modelo estocástico não pode considerar a função custo não linear diretamente, o algoritmo desenvolvido por Slater, [3], usa aproximações lineares por partes, estabelecendo-se segmentos lineares com pontos de quebra convenientemente escolhidos, para representar adequadamente a função custo e custo incremental conforme ilustrado na Figura 2-12.

Os segmentos de potência definidos pelos pontos de quebra da característica entrada-saída de cada unidade geradora são carregados separadamente de acordo com uma ordem econômica de carregamento.

O custo incremental constante do segmento j da unidade i é obtido por:

$$\lambda_{ij} = \frac{\phi_i(P_{u_{ij}}^{\max}) - \phi_i(P_{u_{ij}}^{\min})}{P_{u_{ij}}^{\max} - P_{u_{ij}}^{\min}} \quad (2.13)$$

Enquanto o carregamento de todos os segmentos de cada unidade pode ser feito separado porém sucessivamente, suas funções densidade de

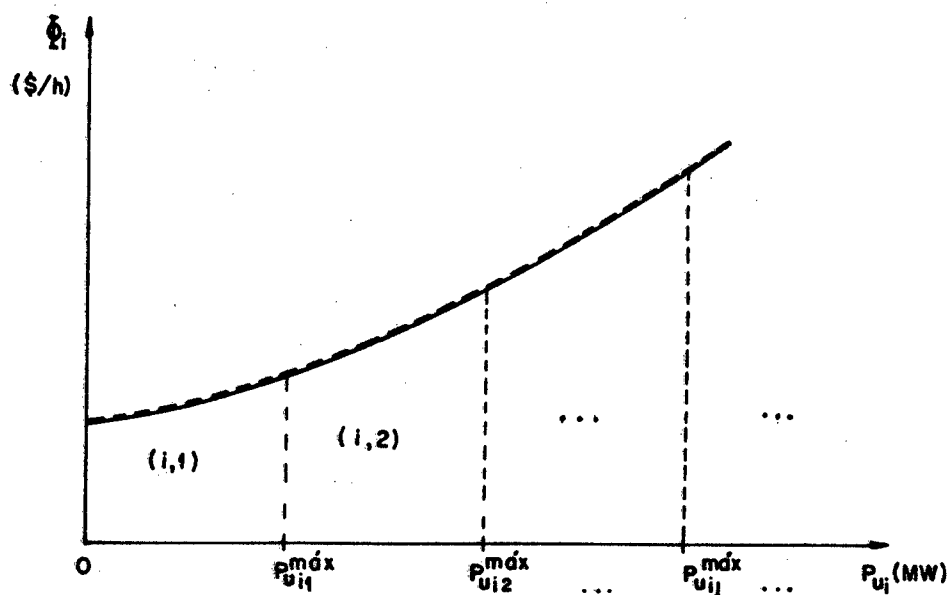


FIGURA 2-11. Característica de produção entrada-saída da unidade i

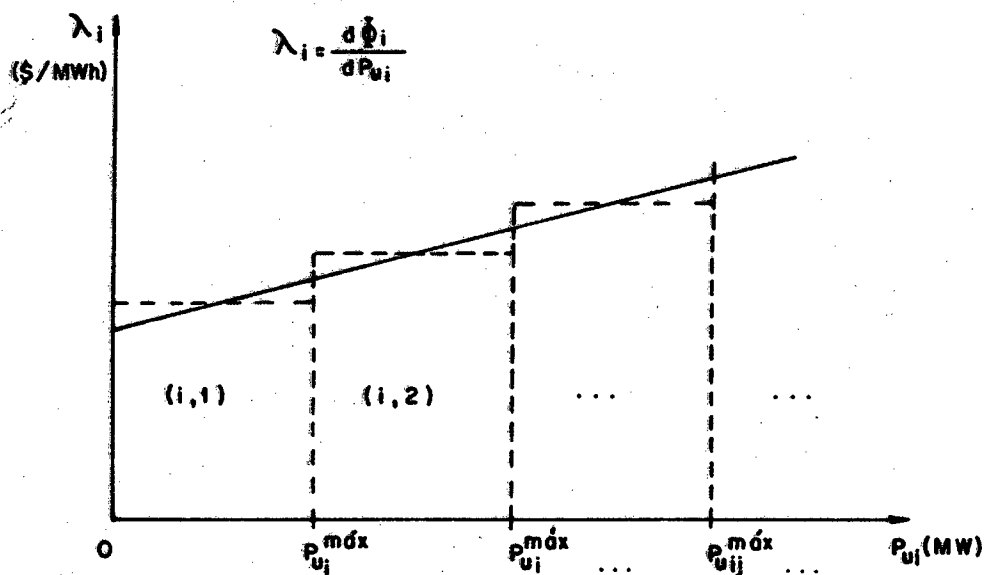


FIGURA 2-12. Curva do custo incremental de produção para a unidade i

disponibilidade não são estatisticamente independentes, já que uma falha pode abranger vários segmentos de potência pertencentes a uma mesma unidade.

Portanto, quando se adiciona um novo segmento de uma dada unidade ao sistema de potência, não se pode simplesmente convolver a distribuição de demanda não atendida (ou densidade) com a densidade de disponibilidade do novo segmento sem antes subtrair o efeito dos segmentos anteriores pertencentes à mesma unidade, o que é feito pelo processo de deconvolução.

O custo de produção de energia produzida pelo segmento  $(i,j)$  pode ser determinado com boa aproximação pelo produto do custo incremental médio do segmento  $\lambda_{ij}$  e a energia esperada produzida pelo segmento,  $E_{ij}$ .

$$C_{ij} = \lambda_{ij} E_{ij} \quad (2.14)$$

O custo total de produção de energia de cada unidade geradora é então igual à soma dos custos de produção de energia de cada segmento contribuinte, pertencente à unidade, mais o custo de introdução da unidade  $\phi_i(0)$ .

$$C_i = \phi_i(0) + \sum_{e=1}^{e_i^{\max}} C_{ij} \quad (2.15)$$

O custo total de produção durante um certo período de tempo é igual à soma dos custos de cada unidade introduzida no sistema durante este período mais o custo obtido pela compra de energia que o sistema não é capaz de

$$C_{ct} = \sum_{k=1}^{\max k} C_k + \lambda_{\text{compra}} E_{na} \quad (2.16)$$

onde  $\lambda_{\text{compra}}$  é o custo médio incremental (\$/mwh) de aquisição de energia sob situações de emergência.

É conveniente notar que, distintamente dos índices de confiabilidade mencionados anteriormente neste capítulo, o custo de produção é uma função não linear da função distribuição da demanda, uma vez que ambos fatores componentes, ou seja, custo incremental e energia, dependem dela. Deve-se então considerar separadamente todas as possíveis distribuições de demanda ocorrendo num dado período, tais como, dias típicos da semana, sábados e domingos e computar seus custos de produção que combinados fornecem o custo total de produção esperado para o período em análise.

### CAPÍTULO III

#### MODELO ESTOCÁSTICO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA

#### CONSIDERANDO FONTE NÃO CONVENCIONAL DE ENERGIA.

#### ENERGIA EÓLICA

##### 3.1.- INTRODUÇÃO

Devido ao crescente interesse no aproveitamento de energias não convencionais, o capítulo apresentará um modelo capaz de representar a energia eólica como mais uma opção do modelo estocástico de produção de energia a médio e curto prazo de fontes convencionais de energia, ou seja, a introdução de fontes não convencionais de energia num sistema de energia de fontes convencionais.

A inclusão da fazenda de vento no sistema, com turbinas de vento idênticas e potência de saída completamente correlacionadas com a mesma velocidade do vento é efetuado sem se preocupar com o tempo computacional, mas sim com sua formulação. Estende-se o estudo a dois sistemas eólicos trabalhando no mesmo sistema elétrico, assim como ao estudo da correlação da potência de demanda com a potência do vento.



### 3.2.- MODELO DAS FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE QUE RELACIONA A VELOCIDADE DO VENTO COM A POTÊNCIA DE SAÍDA DA TURBINA

#### 3.2.1.- MODELO DAS TURBINAS DE VENTO

As turbinas de vento não são projetadas para operar limitadas em níveis extremos, por exemplo, em tempestades, porque não seria econômico ter equipamento operando longe de sua capacidade todo o resto do tempo [8].

A limitação para velocidades de vento entre  $V_n$ , velocidade nominal e  $V_m$ , velocidade máxima ou "cut out" é a potência nominal  $P_n$  que é independente da velocidade do vento nesta faixa, conforme ilustrado na Figura 3-1, isto é:

$$P(v) = P_n \quad V_n \leq v \leq V_m \quad (3.1)$$

$$P(v) = 0 \quad v > V_m \quad (3.2)$$

Outra limitação é a velocidade mínima do vento  $V_i$  ou "cut in" requerida para obter potência disponível na turbina. Se a velocidade é menor que  $V_i$ , a potência será nula.

$$P(v) = 0 \quad v \leq V_i \quad (3.3)$$

Então a potência disponível de uma fazenda de vento é uma simples função da velocidade do vento, sendo que no intervalo parcial de potência

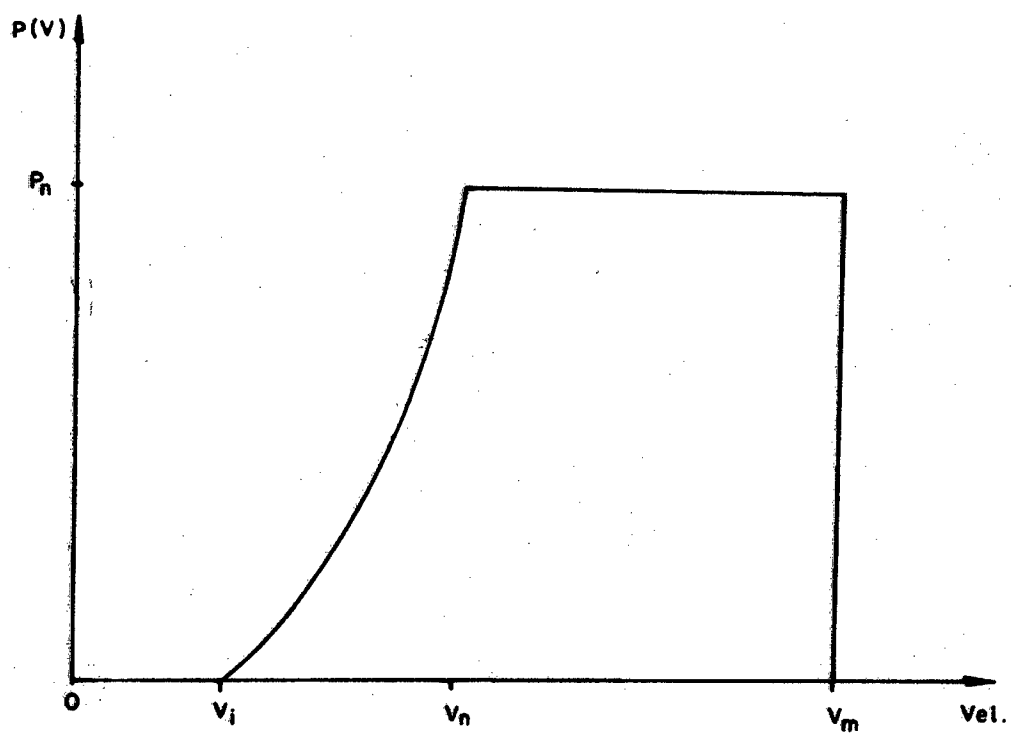


FIGURA 3-1. Curva caraterística da turbina de vento

$V_i < V < V_n$  o relacionamento velocidade do vento e potência de saída pode ser aproximado por uma quadrática, isto é:

$$P(v) = A + B v + C v^2 \quad V_i < v < V_n \quad (3.4)$$

onde,

$$A = P_n V_i [ V_a - 2 V_n ( V_a / V_n )^3 ] / 2 (V_n - V_a)^2 \quad (3.5)$$

$$B = P_n [ V_n - 3 V_a + 4 V_a ( V_a / V_n )^3 ] / 2 (V_n - V_a)^2 \quad (3.6)$$

$$C = P_n [ 1 - 2 ( V_a / V_n )^3 ] / 2 (V_n - V_a)^2 \quad (3.7)$$

$$V_a = ( V_i + V_n ) / 2 \quad (3.8)$$

Com este conjunto de valores na equação da potência obtem-se:

$$A + B V_i + C V_i^2 = 0 \quad (3.9)$$

$$A + B V_n + C V_n^2 = P_n \quad (3.10)$$

A equação quadrática com as constantes A, B e C fornece o mais

realístico modelo. Já a potência fornecida pela fazenda é a soma das potências de saída de cada turbina, [7]. Para tanto, considera-se correlação total entre as unidades da fazenda.

A análise estatística da velocidade do vento, conforme ilustrado no Apêndice B, [5], [7], mostra que o vento apresenta uma função densidade Rayleigh. O resumo estatístico da velocidade do vento ou as velocidades ponto a ponto são suficientes para se calcular as características de potência de saída da turbina de vento.

### 3.2.2.- POTÊNCIA DE SAÍDA UNIVARIADA DA TURBINA DO VENTO

Quando a função densidade da velocidade do vento passa pela relação quadrática da potência de saída da turbina de vento, a função densidade da velocidade é alterada.

Assim para uma velocidade  $V$  de entrada correspondente à abcissa, temos como potência  $P$  de saída correspondente à ordenada dada por:

$$P = g(V) \quad (3.11)$$

Sendo  $V$  uma variável aleatória com função densidade de velocidade do vento conhecida, a função densidade da variável aleatória  $P$  poderá ser obtida para variáveis aleatórias contínuas por:

$$f_P(P) = \frac{f_V(V1)}{|g'(V1)|} \quad (3.12)$$

onde  $V_1$  é a raiz da equação 3.11 e,

$$g' = \frac{d g(V)}{dV} \quad (3.13)$$

Para variáveis aleatórias discretas, a função de probabilidade de potência de saída da turbina de vento é:

$$P_P(P) = \sum_{V \in R(P)} Pr(V = V) \quad (3.14)$$

obtida pela soma da probabilidade do ponto de massa na região  $R(P)$  definida pela equação 3.11.

### 3.2.3.- MODELO DA POTÊNCIA DE SAÍDA BIVARIADA DA TURBINA DO VENTO

Quando a função densidade conjunta Rayleigh, ilustrado no Apêndice B, [9], passa pela relação de duas turbinas pertencentes a duas fazendas de vento, obtém-se a função densidade conjunta de potência das duas fazendas.

Sendo as relações de potência,

$$P_1 = g_1(V_1, V_2) \quad (3.15)$$

$$P_2 = g_2(V_1, V_2) \quad (3.16)$$

onde  $P_1$  e  $P_2$  são potências de saída de suas correspondentes turbinas e as variáveis aleatórias  $V_1$  e  $V_2$  tem função densidade conjunta de velocidade do vento conhecida.

A função densidade de probabilidade conjunta da potência de saída para variáveis aleatórias contínuas é,

$$f_{P_1 P_2}(P_1, P_2) = \iint_{R(P_1 P_2)} f_{V_1 V_2}(V_1, V_2) dV_1 dV_2 \quad (3.17)$$

$$= \frac{f(V_1, V_2)}{|\det J(V_1, V_2)|} \quad (3.18)$$

onde  $J(V_1, V_2)$  é a matriz jacobiana da transformação das equações 3.15 e 3.16, isto é:

$$J(V_1, V_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(V_1, V_2)}{\partial V_1} & \frac{\partial g_1(V_1, V_2)}{\partial V_2} \\ \frac{\partial g_2(V_1, V_2)}{\partial V_1} & \frac{\partial g_2(V_1, V_2)}{\partial V_2} \end{bmatrix}$$

---

Para variáveis aleatórias discretas a função é:

$$p_{P_1 P_2}(P_1, P_2) = \sum_{(V_1, V_2) \in R(P_1, P_2)} \Pr(V_1 = V_1, V_2 = V_2) \quad (3.19)$$

A qual é obtida pela soma das probabilidades de todos os pontos de massa na região R, [9], a região R é definida pelas equações 3.15 e 3.16.

### 3.3.- MODELO DAS FUNÇÕES DE DISPONIBILIDADE DE POTÊNCIA DE UM E DOIS SISTEMAS EÓLICOS

#### 3.3.1. INTRODUÇÃO

Para a disponibilidade de unidades não convencionais adota-se o modelo a dois estados, operacional e não operacional, existindo portanto, um único estado operacional de potência de saída.

A indisponibilidade de unidades não convencionais deve ser computada da razão entre as horas de saída forçada em período de trabalho e a soma destas com as horas de serviço, isto é,

$$F.O.R = \frac{FOH (D/24)}{FOH (D/24) + SH} = T.I.F.; \quad (3.20)$$

sendo FOH as horas de saída forçada, SH as horas em serviço, D o número de horas solicitadas em operação, ( por exemplo D = 24 horas/dia para unidades em base trabalhando o tempo todo).

Esta extensão do conceito de taxa de saída forçada ou taxa de

indisponibilidade forçada para unidades não convencionais deve-se, além da característica inerente de menos horas de operação anuais, às freqüentes partidas e desligamentos que acarretam um aumento considerável nas solicitações impostas a tais máquinas. Deste modo, a taxa de saída forçada é fortemente influenciada pela operação intermitente da unidade geradora [13].

Informações da literatura indicam a indisponibilidade entre 10 e 20 por cento [5].

### 3.3.2. - MODELO DA DISPONIBILIDADE DA CAPACIDADE DE UM SISTEMA EÓLICO

O número de turbinas disponíveis de uma fazenda de vento independe da carga e da velocidade do vento. Então a função disponibilidade de um sistema eólico tem a função distribuição de probabilidade binomial, na qual  $p$  é a disponibilidade da turbina de vento e  $q$  a indisponibilidade, [4].

Seja " $C$ " a capacidade nominal de cada turbina e " $n$ " o número de unidades de uma fazenda. A probabilidade de se ter " $\lambda$ " turbinas de vento trabalhando é,

$$D(\lambda) = \binom{n}{\lambda} p^{\lambda} q^{n-\lambda} \quad (3.21)$$

### 3.3.3. - MODELO DA DISPONIBILIDADE DE CAPACIDADE DE DOIS SISTEMAS EÓLICOS

A disponibilidade da capacidade de um sistema eólico independe da disponibilidade de turbinas do outro sistema eólico. Então a função densidade conjunta de disponibilidade é igual ao produto das disponibilidades da capacidade dos sistemas eólicos, isto é,



$$D(\lambda_1, \lambda_2) = D(\lambda_1) \cdot D(\lambda_2) \quad (3.22)$$

onde  $D(\lambda_1)$  e  $D(\lambda_2)$  são as disponibilidades de capacidade do primeiro e do segundo sistema eólico, respectivamente e:

$$0 \leq \lambda_1 \leq n_1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \lambda_2 \leq n_2 \quad (3.22.1)$$

sendo " $n_1$ " e " $n_2$ " o número total de unidades das fazendas, respectivamente.

### 3.4. MODELO DA FUNÇÃO PROBABILIDADE DA POTÊNCIA DISPONÍVEL

#### 3.4.1. MODELO DA FUNÇÃO PROBABILIDADE DE POTÊNCIA DISPONÍVEL DE UM SISTEMA EÓLICO

A potência disponível em um sistema eólico  $G$  é definida a partir das variáveis aleatórias independentes  $P$  e  $\lambda$  que são a potência do vento de cada gerador, pressupondo correlação total do vento na fazenda, e o número de unidades disponíveis respectivamente, [4], isto é,

$$G = \lambda P \quad (3.23)$$

Sendo conhecidas a função probabilidade de disponibilidade binomial  $D(\lambda)$  (seção 3.3.1) e a função probabilidade da potência do vento de cada gerador  $p_p(P)$  (seção 3.2.2.) é possível computar a função probabilidade de potência do sistema eólico,

$$p_G(G) = \sum_{\lambda} D(\lambda) p_p\left(\frac{G}{\lambda}\right) \quad (3.24)$$

assim como sua função distribuição  $F_G(G)$  e função distribuição complementar  $G_G(G)$ .

Considerando por unidade a potência disponível de um sistema eólico  $G_{pu}$ , a potência de saída da turbina do vento  $P_{pu}$  e o número de unidades disponíveis  $\lambda_{pu}$  na equação 3.24 é expressada por:

$$p_G(G_{pu}) = \sum_{\lambda_{pu}} D(\lambda_{pu}) p_p\left(\frac{G_{pu}}{\lambda_{pu}}\right) \quad (3.24.1)$$

onde,

$$G_{pu} = \frac{G}{nC}, \quad \lambda_{pu} = \frac{\lambda}{n}, \quad p_{pu} = \frac{p}{C} \quad (3.24.2)$$

A Tabela 3-1 ilustra a função disponibilidade de um sistema eólico que consta de 20 unidades com taxa de indisponibilidade forçada de 10%, as características das turbinas são "cut-in" 5,5 m/s, "cut-out" 27,5 m/s e

velocidade nominal 13,91 m/s.

TABELA 3-1 - Função Distribuição de Potência  
Disponível de Um Sistema Eólico

$\lambda, P, G$ p.u.	$D(\lambda)$	$P_P(P)$	$P_G(G)$	$F_G(G)$	$G_G(G)$
.000	.000	.459	.459	.459	.541
.110	.000	.192	.211	.670	.330
.220	.000	.080	.082	.752	.248
.330	.000	.068	.063	.815	.185
.440	.000	.000	.007	.822	.178
.560	.000	.055	.046	.868	.132
.670	.011	.043	.032	.900	.100
.780	.122	.032	.022	.922	.078
.890	.475	.000	.039	.961	.039
1.000	.392	.069	.027	.988	.012

onde  $D(\lambda)$  é a função de disponibilidade,  $p_P(P)$  a função probabilidade de potência,  $p_G(G)$ ,  $F_G(G)$  e  $G_G(G)$  as funções probabilidade, distribuição e distribuição complementar de potência disponível de um sistema eólico.

Observa-se que a função distribuição não alcança 1, devido a erros de discretização.

#### 3.4.2. MODELO DA FUNÇÃO PROBABILIDADE DE POTÊNCIA DISPONÍVEL DE DOIS SISTEMAS EÓLICOS

A potência disponível de dois sistemas eólicos ( $G_1, G_2$ ) é obtida a partir das variáveis aleatórias ( $P_1, P_2$ ) e ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) que são a potência do

vento e o número disponível de turbinas nos diferentes sistemas eólicos.

$$G_1 = P_1 \lambda_1 \quad (3.25)$$

$$G_2 = P_2 \lambda_2 \quad (3.26)$$

Sendo conhecida a função probabilidade conjunta de disponibilidade  $D(\lambda_1, \lambda_2)$ , (seção 3.3.2) e a função probabilidade conjunta de potência  $P_{P_1 P_2}(P_1, P_2)$  (seção 3.2.3), é possível computar a função de probabilidade conjunta de potência disponível dos sistemas eólicos, isto é,

$$P_{G_1 G_2}(G_1, G_2) = \int_{\lambda_1} \int_{\lambda_2} D(\lambda_1, \lambda_2) P_{P_1 P_2} \left( \frac{G_1}{\lambda_1}, \frac{G_2}{\lambda_2} \right) \quad (3.27)$$

Se  $(G_1, G_2)$  for um par ordenado,

$$p(G_1, G_2) = \Pr \{G_1 = G_1, G_2 = G_2\} \quad (3.28)$$

o fato de  $G_1$  e  $G_2$  serem variáveis aleatórias implica que a soma de  $p(G_1, G_2)$  sobre todos os pares  $(G_1, G_2)$  é 1. Se a probabilidade é estudada como uma distribuição de massa bidimensional,  $p(G_1, G_2)$  representa o ponto de massa ligado ao ponto com coordenadas  $(G_1, G_2)$ . Se o par  $(G_1, G_2)$  não é um ponto no contradomínio conjunto  $(G_1, G_2)$ , então  $p(G_1, G_2) = 0$ . É claro que  $p(G_1, G_2)$  representa uma função que associa um número a cada par  $(G_1, G_2)$ , [12].

A densidade de sua soma  $G = G_1 + G_2$  para variáveis aleatórias

contínuas é:

$$f_G(G) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{G_1 G_2}(G - G_2, G_2) dG_2 \quad (3.33)$$

Para variáveis aleatórias discretas,

$$p_G(G) = \sum_{G_2} p(G - G_2, G_2) \quad (3.34)$$

Também se obtém a função distribuição  $F(G) = \Pr\{G \leq G\}$ , e a função complementar  $G(G) = \Pr\{G > G\}$  que é a mais importante porque nos proporciona a potência e sua respectiva disponibilidade, que será o dado de entrada de energia não convencional no modelo estocástico de produção de energia para fontes convencionais e não convencionais, supondo independência entre a potência de demanda e a potência do vento.

A Tabela 3-2 ilustra a função densidade de potência disponível de dois sistemas eólicos iguais, com 20 turbinas em cada sistema e taxa de saída forçada de 10%. As características da turbina são "cut-in" 5,5 m/s, "cut-out" 27,5 m/s e " $V_n$ " 13,91 m/s.

TABELA 3-2 - Função Densidade de Potência Disponível  
de Dois Sistemas Eólicos

G p. u.	p(G)	F <sub>G</sub> (G)	G <sub>G</sub> (G)
.000	.422	.422	.578
.110	.183	.605	.395
.220	.081	.686	.314
.330	.078	.765	.235
.440	.082	.847	.153
.560	.056	.903	.097
.670	.024	.926	.074
.780	.026	.953	.047
.890	.023	.976	.024
1.000	.014	.989	.011

onde G é a potência de saída normalizada e  $p_G(G)$ ,  $F_G(G)$  e  $G_G(G)$  as funções densidade, distribuição e distribuição complementar da potência disponível.

### 3.5. FORMAS DE INCLUSÃO DE SISTEMAS EÓLICOS NO MODELO ESTOCÁSTICO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA

#### 3.5.1. INCLUSÃO DE SISTEMAS EÓLICOS SEM CORRELAÇÃO COM A POTÊNCIA DE DEMANDA

Do produto da potência da turbina e a disponibilidade das unidades obtém-se a potência disponível e sua respectiva disponibilidade, dados estes que são submetidos ao modelo estocástico de produção de energia como se fossem de uma fonte convencional térmica de baixa disponibilidade e com custo

de produção nulo. Ao se considerar mais de um sistema eólico sem correlação entre os mesmos, os dados do segundo sistema são submetidos em seqüência aos do primeiro. Para incluir no modelo estocástico sistemas eólicos correlacionados, estes são submetidos em forma conjunta como um só sistema eólico equivalente, adicionando-se suas potências correlatas, conforme se ilustra no apêndice A.

### 3.5.2. SISTEMAS EÓLICOS CORRELACIONADOS COM A DEMANDA

Tendo em vista estudar a correlação da potência da demanda com a potência produzida pelo vento de um aproveitamento eólico e analisar os efeitos da correlação, adotou-se a técnica de subtração da potência de demanda horária do vento. Obtém-se assim a potência de demanda não suprida pela energia eólica a qual é então submetida ao modelo estocástico de fontes convencionais.

A potência eólica média horária de cada sistema  $i$  é obtida pela seguinte equação.

$$G_i(t) = n p P_i(t) \quad (3.35)$$

onde " $n p$ " é a média da distribuição binomial de disponibilidade com " $n$ " unidades, cada qual com disponibilidade " $p$ ", " $P_i(t)$ " potência de saída da turbina  $i$ .

Esta expressão é correta sob o ponto de vista da energia, mas é aproximada em termos de capacidade de ponta. Justifica-se seu uso com o fato de que a probabilidade de um aproveitamento eólico operar próximo a sua

capacidade máxima, é geralmente muito pequena.

Ao se considerar mais de um sistema eólico correlacionado, a potência eólica total é considerada como a soma das potências médias dos diferentes sistemas eólicos, hora a hora.

A potência de demanda não suprida pela potência eólica resulta da função probabilidade conjunta computada a partir dos dados da curva cronológica diária da potência de demanda  $L$  e da potência de saída do sistema eólico  $G$  discretizados em passos de potência iguais, onde cada um dos pares  $(L, G)$  tem a mesma probabilidade de ocorrência, pode-se imaginar como pontos de massa iguais localizados no plano  $LG$ .

Da diferença entre a potência de demanda  $L$  e da potência do sistema eólico  $G$  se obtém como resultado a potência de demanda não suprida pela potência do vento, isto é,

$$S = L - G \quad (3.36)$$

onde a diferença das variáveis aleatórias na forma contínua é computada por:

$$f_S(S) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{SG}(S + G, -G) dG \quad (3.37)$$

Na forma discreta:

$$P_S(S) = \sum_G p(S + G, -G) \quad (3.38)$$



Obtida a função densidade de probabilidade de demanda não atendida pode-se computar a função distribuição definida pela probabilidade  $F(S) = \Pr(S \leq S)$ , assim como a função distribuição complementar definida pela probabilidade  $G(S) = \Pr(S > S)$ . Esta função pode ser convertida numa curva duração de demanda por uma simples troca de eixos modificando a variável normalizada pela variável tempo.

Os dados resultantes obtidos da curva duração de demanda são submetidos ao modelo estocástico de produção de energia elétrica para a avaliação de confiabilidade, assim como o custo de produção de energia.

## CAPÍTULO IV

### SOLUÇÕES DO MODELO ESTOCÁSTICO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA

#### 4.1. INTRODUÇÃO

Tendo em vista mostrar o desempenho do modelo estocástico de produção de energia para fontes convencionais e não convencionais de energia estabelecidos nos Capítulos II e III respectivamente, foram utilizados parte dos dados do sistema de potência boliviano tanto da geração, o qual consta de unidades a gás e óleo diesel, quanto da demanda, ilustrados no Apêndice A. Os dados do sistema eólico acrescentados ao sistema convencional correspondem aos apresentados no Capítulo III e aos exemplificados neste capítulo, fazendo referência ao número de tabela e ao índice quando usados os mesmos. Os índices de confiabilidade em fontes convencionais e fontes não convencionais, úteis na avaliação da continuidade de atendimento em sistemas de potência, assim como o custo de produção de energia, são estudados por comparação da capacidade do sistema convencional e um sistema idêntico estendido com a energia eólica.

O capítulo também apresenta variações de alguns parâmetros para o

estudo de sensibilidade do modelo. Os gráficos e tabelas do sistema eólico aqui apresentados estão discretizados por unidade da potência de saída e do número de turbinas trabalhando no sistema eólico para a potência e disponibilidade, respectivamente, assim como para a potência disponível do sistema eólico, os quais exemplificam a teoria apresentada no Capítulo III.

## 4.2. EXEMPLIFICAÇÃO DE UM SISTEMA EÓLICO

### 4.2.1. INTRODUÇÃO

Para o estudo de um sistema eólico foram consideradas as seguintes limitações da curva característica da turbina de vento, isto é, velocidade "cut-in" de 5,5 m/s, "cut-out" de 27,5 m/s e velocidade nominal 13,9 m/s. Assim para caracterizar a incidência de vento, adotou-se a função densidade Rayleigh com o fator de escala em 5,842 m/s. A fazenda eólica é composta de 15 unidades, cada uma com potência nominal igual a 2 MW, com taxa de indisponibilidade 20%.

### 4.2.2. FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE UNIVARIADADA DA POTÊNCIA DE SAÍDA

Do cômputo da velocidade do vento que passa pela relação quadrática da curva característica da turbina, se obtém a função probabilidade da potência de saída  $p(P)$ , isto é:

$$p(P) = \sum_{V \in R(P)} \Pr(V = V) \quad (4.1)$$

Obtida pela soma de probabilidade do ponto de massa na região R, conforme ilustra a Tabela 4-1 e Figura 4-1.

TABELA 4-1 – Funções de Probabilidade e Distribuição  
Univariada da Potência de Saída

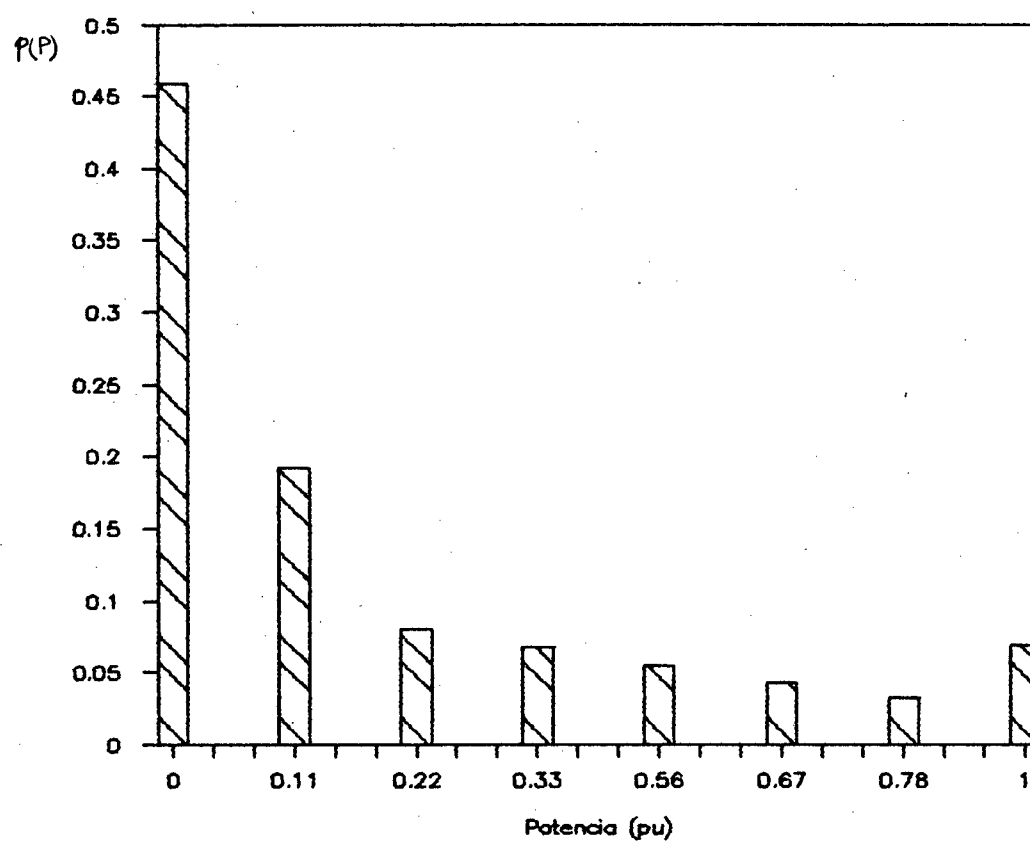
P p. u.	p(p)	F(p)
.000	.459	.459
.110	.192	.651
.220	.080	.732
.330	.068	.799
.440	.000	.799
.560	.055	.854
.670	.043	.897
.780	.032	.929
.890	.000	.929
1.000	.069	.998

Onde P é a potência por unidade, p(P) e F(P) são as funções de probabilidade e distribuição de potência respectivamente.

#### 4.2.3. DISPONIBILIDADE DE CAPACIDADE DE UM SISTEMA EÓLICO

A disponibilidade de capacidade  $D(\lambda)$  tem uma função distribuição binomial, variando de acordo com o número de turbinas  $\lambda$  e a taxa de indisponibilidade  $q$ , isto é,

FIGURA 4-1. Função probabilidade de potência  
de uma turbina de vento



$$D(\lambda) = \binom{n}{\lambda} p^\lambda q^{n-\lambda} \quad (4.2)$$

conforme ilustrado na Figura 4-2 e Tabela 4-2.

TABELA 4-2 - Disponibilidade de Capacidade  
de Um Sistema Eólico

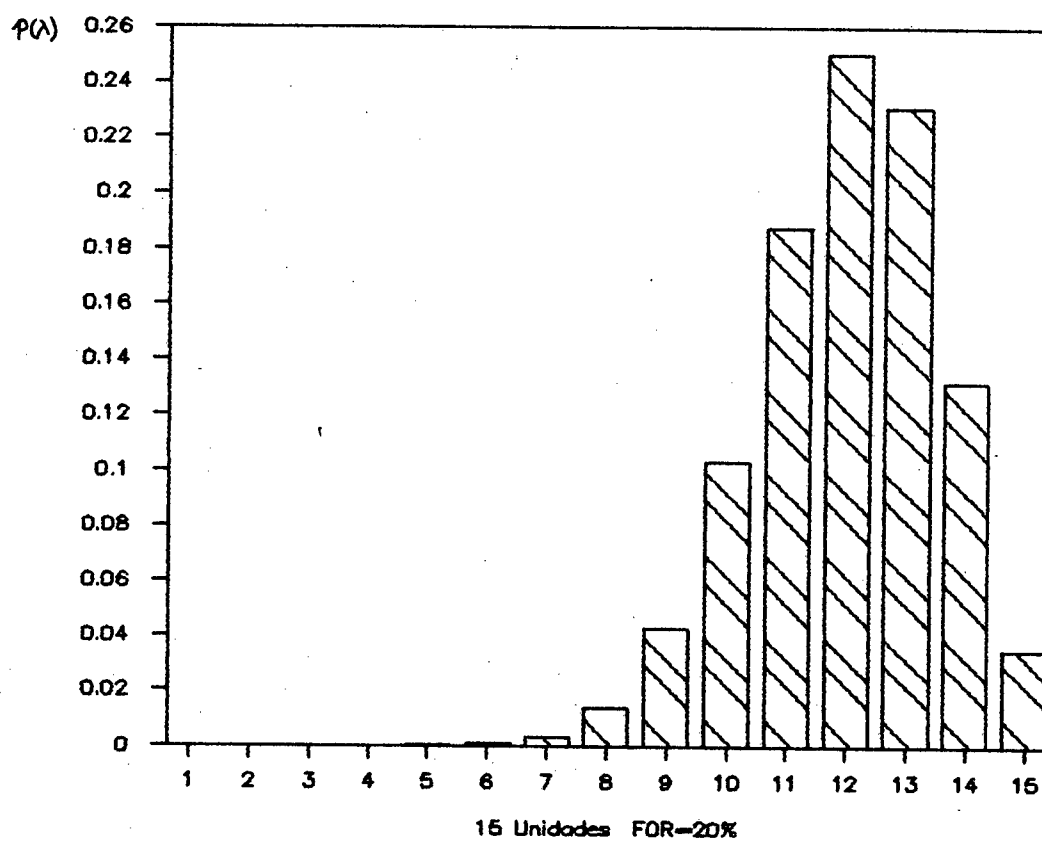
$\lambda$ p. u.	D( $\lambda$ )	F( $\lambda$ )
.000	.000	.000
.110	.000	.000
.220	.000	.000
.330	.000	.000
.440	.004	.004
.560	.057	.061
.670	.103	.164
.780	.438	.602
.890	.363	.965
1.000	.035	1.000

onde  $\lambda$  é o número de turbinas por unidades, D( $\lambda$ ) e F( $\lambda$ ) as funções probabilidade e distribuição de capacidade.

#### 4.2.4. FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DA POTÊNCIA DISPONÍVEL DE UM SISTEMA EÓLICO

O resultado do cômputo do produto da disponibilidade das turbinas de vento e a função probabilidade de potência de saída da turbina de vento é a função probabilidade de potência disponível p(G), isto é:

FIGURA 4-2. Função disponibilidade  
de um sistema eólico



$$p_G(G) = \sum_D D(\lambda) p_P\left[\frac{G}{\lambda}\right] \quad (4.3)$$

conforme ilustrado na Tabela 4-3 e Figura 4-3.

TABELA 4-3 - Funções Probabilidade, Distribuição e  
Distribuição Complementar da Potência Disponível

P p.u.	D(λ)	p(P)	p(G)	F(G)	G(G)
.000	.000	.459	.459	.459	.541
.110	.000	.192	.227	.686	.314
.220	.000	.080	.068	.754	.246
.330	.000	.068	.033	.787	.213
.440	.004	.000	.031	.818	.182
.560	.057	.055	.040	.858	.142
.670	.103	.043	.027	.885	.115
.780	.438	.032	.044	.930	.070
.890	.363	.000	.055	.985	.015
1.000	.035	.069	.002	.988	.012

onde P é a potência em p.u.; D(λ) disponibilidade de capacidade, p(P) função probabilidade de potência de saída, e onde p(G), F(G) e G(G) são as funções de probabilidade, distribuição, distribuição complementar, respectivamente, da potência disponível no sistema eólico, conforme ilustrado nas Figuras 4-4 e 4-5.



FIGURA 4-3. Função densidade de potência  
de um sistema eólico

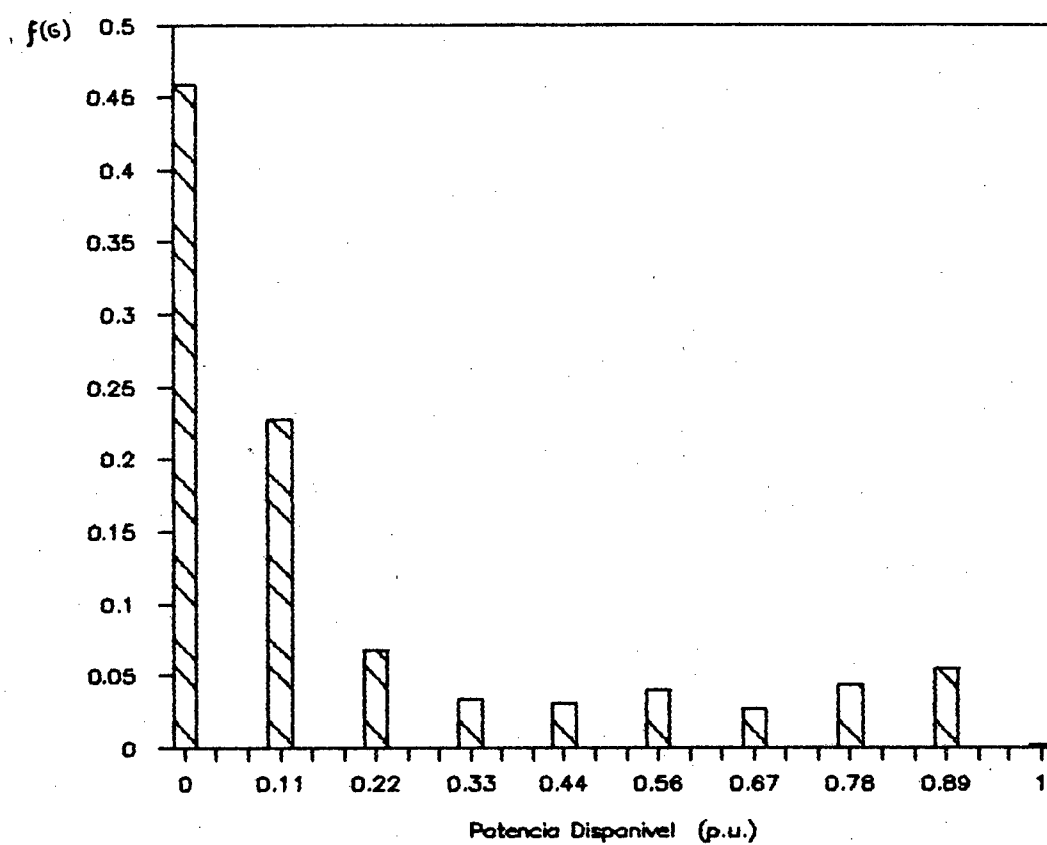


FIGURA 4-4. Função distribuição complementar da potência disponível de um sistema eólico

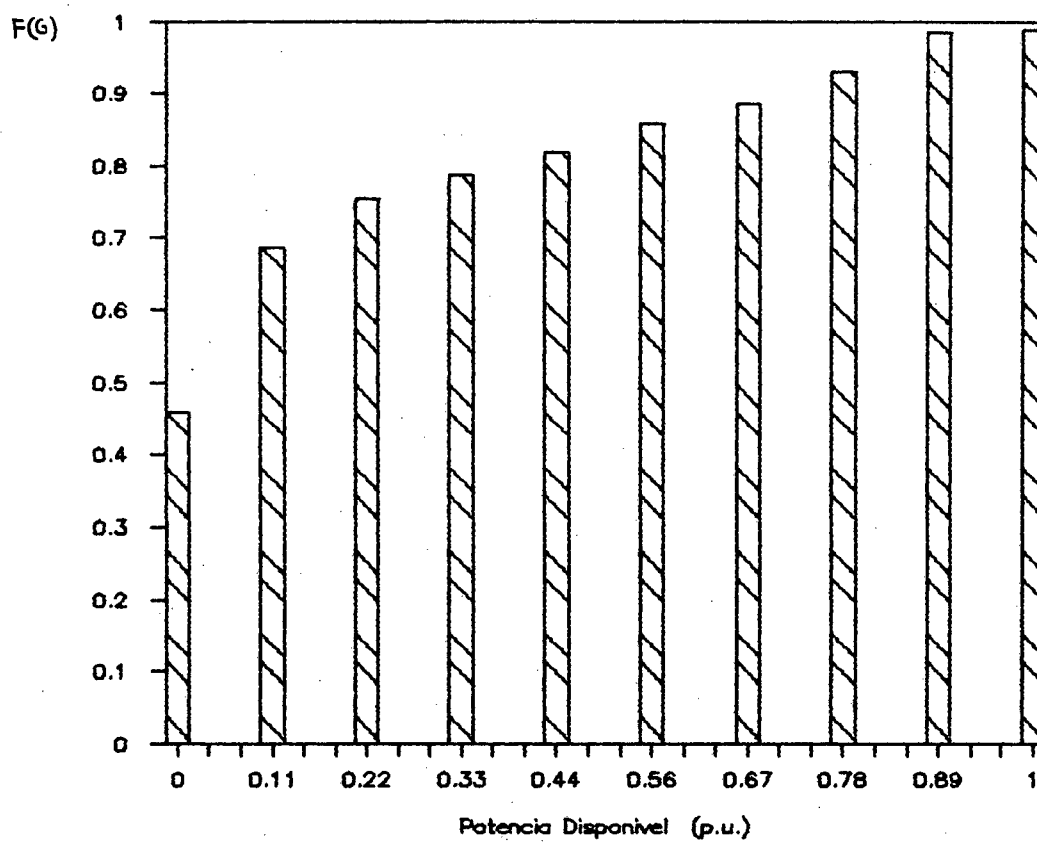
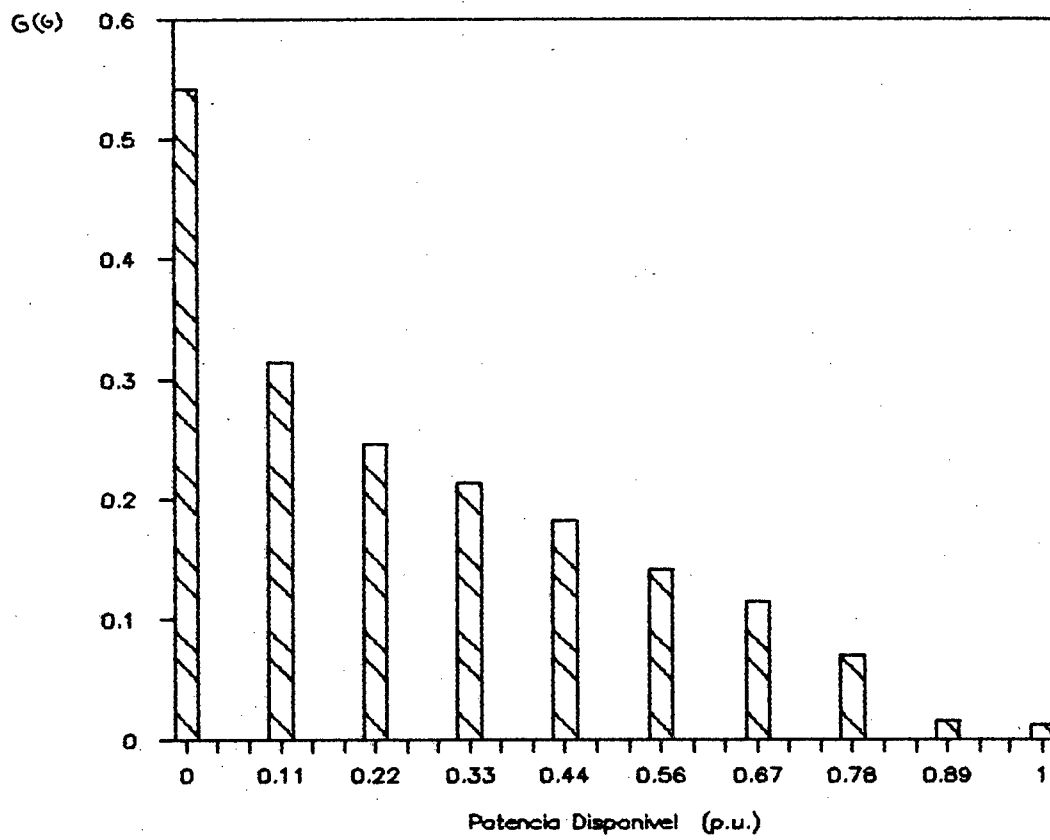


FIGURA 4-5. Função distribuição complementar da potência disponível de um sistema eólico



### 4.3. EXEMPLIFICAÇÃO DE DOIS SISTEMAS EÓLICOS

#### 4.3.1. INTRODUÇÃO

Para o estudo dos dois sistemas eólicos se consideraram as limitações da curva característica da turbina de vento como sendo iguais, isto é, "cut-in" 5,5 m/s; "cut out" 27,5 m/s; velocidade nominal 13,9 m/s, assim como o fator de escala Rayleigh 5,842 m/s e o número de turbinas trabalhando em cada sistema igual a 15 unidades com taxa de saída forçada de 20%, a correlação entre os sistemas eólicos é fixada em 50%.

#### 4.3.2. FUNÇÃO PROBABILIDADE BIVARIADA DA POTÊNCIA DE SAÍDA DA TURBINA DE VENTO

A função probabilidade bivariada de potência de saída  $p(P_1, P_2)$  resultado da função densidade bivariada Rayleigh com correlação 0,5, exemplificada no Apêndice B, que passa pelas duas curvas características das turbinas de vento é:

$$p_{P_1 P_2}(P_1, P_2) = \sum_{(V_1, V_2) \in R(P_1, P_2)} \Pr(V_1 = V_1, V_2 = V_2) \quad (4.4)$$

a qual é obtida pela soma das probabilidades de todos os pontos de massa na Região R, conforme ilustrado na Tabela 4-4.

TABELA 4-4 - Função Probabilidade Bivariada da Potência  
de Saída da Turbina do Vento

P <sub>2</sub> ↓ P <sub>1</sub> →	.000	.110	.220	.330	.440	.560	.670	.780	.890	1.000
.000	.242	.090	.035	.028	.000	.021	.015	.010	.000	.017
.110	.090	.038	.016	.013	.000	.010	.008	.006	.000	.011
.220	.035	.016	.007	.006	.000	.005	.004	.003	.000	.006
.330	.028	.013	.006	.005	.000	.004	.003	.003	.000	.006
.440	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.560	.021	.010	.005	.004	.000	.004	.003	.002	.000	.005
.670	.015	.008	.004	.003	.000	.003	.002	.002	.000	.005
.780	.010	.006	.003	.003	.000	.002	.002	.002	.000	.004
.890	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1.000	.017	.011	.006	.006	.000	.005	.005	.004	.000	.014

#### 4.3.3. DISPONIBILIDADE DE CAPACIDADE DE DOIS SISTEMAS EÓLICOS

A disponibilidade de capacidade de dois sistemas eólicos  $D(\lambda_1, \lambda_2)$ , obtida do produto das disponibilidades dos dois sistemas eólicos com seus respectivos números de turbinas trabalhando no sistema e suas taxas de saída forçada e lembrando a independência estatística da disponibilidade:

$$D(\lambda_1, \lambda_2) = D(\lambda_1) D(\lambda_2) \quad (4.5)$$

onde  $D(\lambda_1)$  e  $D(\lambda_2)$  são as disponibilidades de capacidade do primeiro e

segundo sistema eólico, conforme ilustrado na Tabela 4-5.

TABELA 4-5 - Disponibilidade de Capacidade  
Dois Sistemas Eólicos

$D_{2\downarrow}$ $D_{1\rightarrow}$	0.000	0.110	.220	.330	.440	.560	.670	.780	.890	1.000
0.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.110	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.220	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.330	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
.440	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.001	.000
.560	.000	.000	.000	.000	.000	.003	.006	.025	.021	.002
.670	.000	.000	.000	.000	.000	.006	.011	.045	.037	.004
.780	.000	.000	.000	.000	.002	.025	.045	.192	.159	.015
.890	.000	.000	.000	.000	.001	.021	.037	.159	.132	.013
1.000	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.004	.015	.013	.001

#### 4.3.4. FUNÇÃO PROBABILIDADE DE POTÊNCIA DISPONÍVEL DE DOIS SISTEMAS EÓLICOS

A partir do conhecimento da disponibilidade de capacidade bivariada e a função probabilidade de potência de saída da turbina de vento é possível computar a função probabilidade conjunta de potência dos sistemas  $p(G_1, G_2)$ , isto é,

$$P_{G_1 G_2}(G_1, G_2) = \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} D(\lambda_1, \lambda_2) P_1 P_2 \left[ \frac{G_1}{\lambda_1} \frac{G_2}{\lambda_2} \right] \quad (4.6)$$

conforme ilustra a Tabela 4-6.

TABELA 4-6 - Função de Probabilidade Conjunta da Potência  
Disponível nos Sistemas Eólicos

$G_2 \downarrow \quad G_1 \rightarrow$	0.000	0.110	.220	.330	.440	.560	.670	.780	.890	1.000
0.000	.242	.086	.029	.012	.011	.014	.007	.010	.006	.017
.110	.086	.035	.013	.006	.006	.007	.004	.006	.004	.011
.220	.029	.013	.005	.002	.002	.003	.002	.003	.002	.006
.330	.012	.006	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.003
.440	.011	.006	.002	.001	.001	.002	.001	.002	.001	.003
.560	.014	.007	.003	.001	.002	.002	.001	.003	.002	.005
.670	.007	.004	.002	.001	.001	.001	.001	.002	.001	.003
.780	.010	.006	.003	.001	.002	.003	.002	.003	.002	.007
.890	.013	.004	.002	.001	.001	.002	.001	.002	.002	.005
1.000	.001	.011	.006	.003	.003	.005	.003	.007	.005	.014

A função probabilidade de sua soma  $p(G)$  assim como a função distribuição  $F(G)$  e a função distribuição complementar  $G(G)$  são ilustrados na Tabela 4-7 e nas Figuras 4-6, 4-7 e 4-8 respectivamente.

TABELA 4-7 - Funções Probabilidade, Distribuição e distribuição complementar da potência disponível nos sistemas eólicos

G p.u.	$p_G(G)$	$F_G(G)$	$G_G(G)$
.000	.415	.415	.585
.110	.143	.558	.442
.220	.082	.640	.360
.330	.071	.711	.289
.440	.075	.786	.214
.560	.052	.838	.162
.670	.027	.865	.135
.780	.028	.893	.107
.890	.025	.918	.082
1.000	.014	.932	.068

#### 4.4. FUNÇÃO PROBABILIDADE DE POTÊNCIA DE DEMANDA NÃO SUPRIDA PELA POTÊNCIA DO VENTO

Para o estudo da correlação das potências de demanda e eólica se faz uso da função densidade conjunta obtida a partir da curva cronológica diária da potência de demanda e da potência do vento que correspondem às curvas características típicas mensais discretizadas em passos de potência, conforme ilustrado nas Figuras 4-9 e 4-10.

O resultado da diferença da potência de demanda e potência de vento é a função probabilidade de potência de demanda não suprida pela potência do vento  $p(S)$ , isto é,



FIGURA 4-6. Função densidade e potência disponível  
de dois sistemas eólicos

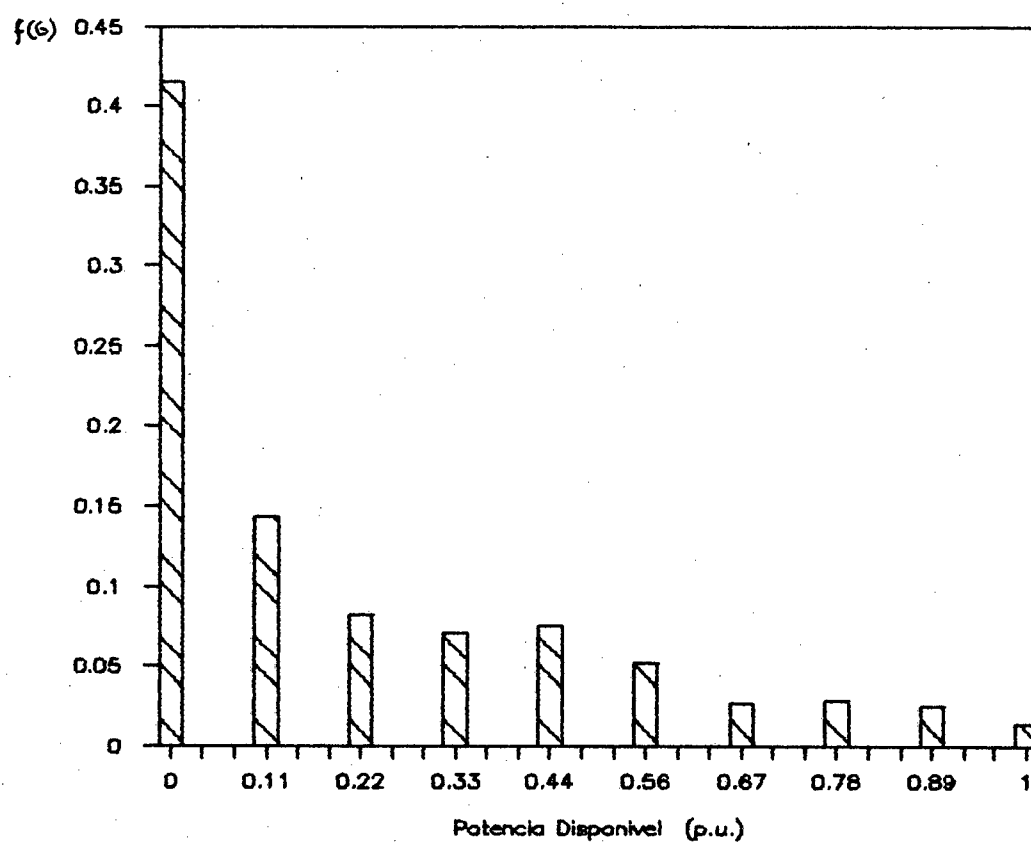


FIGURA 4-7. Função distribuição de potência disponível  
de dois sistemas eólicos

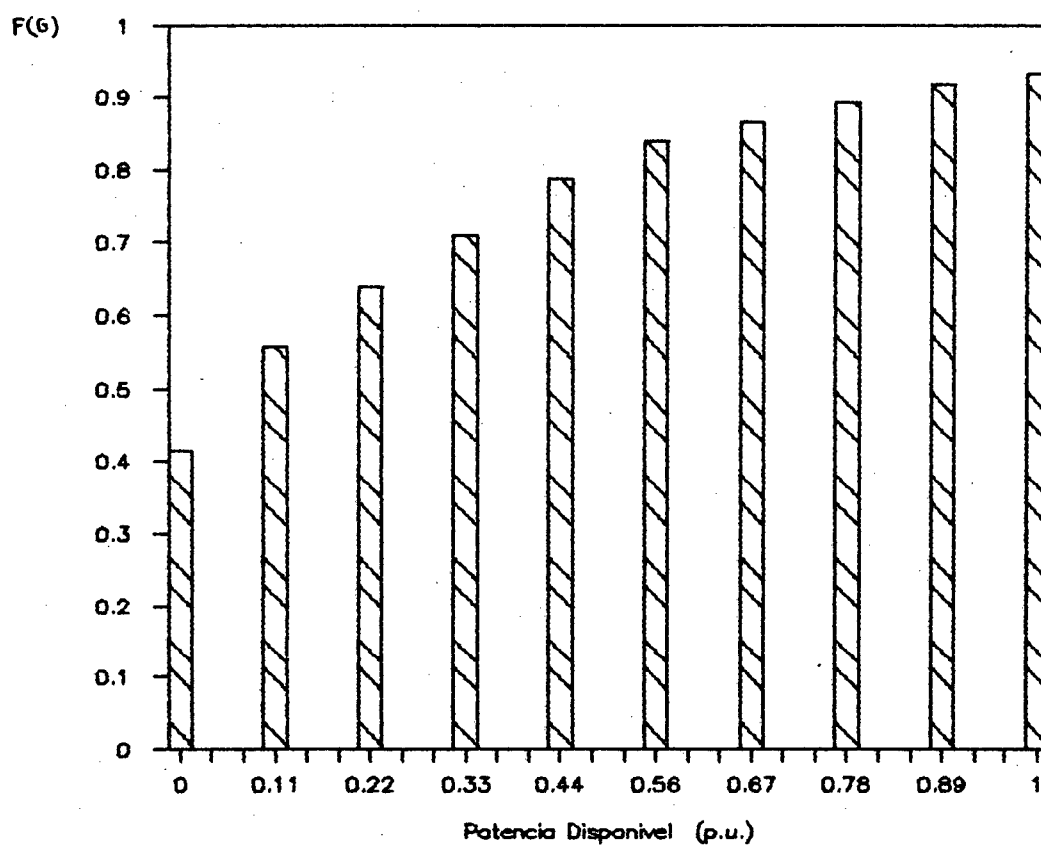


FIGURA 4-8. Função distribuição complementar de potência disponível de dois sistemas eólicos

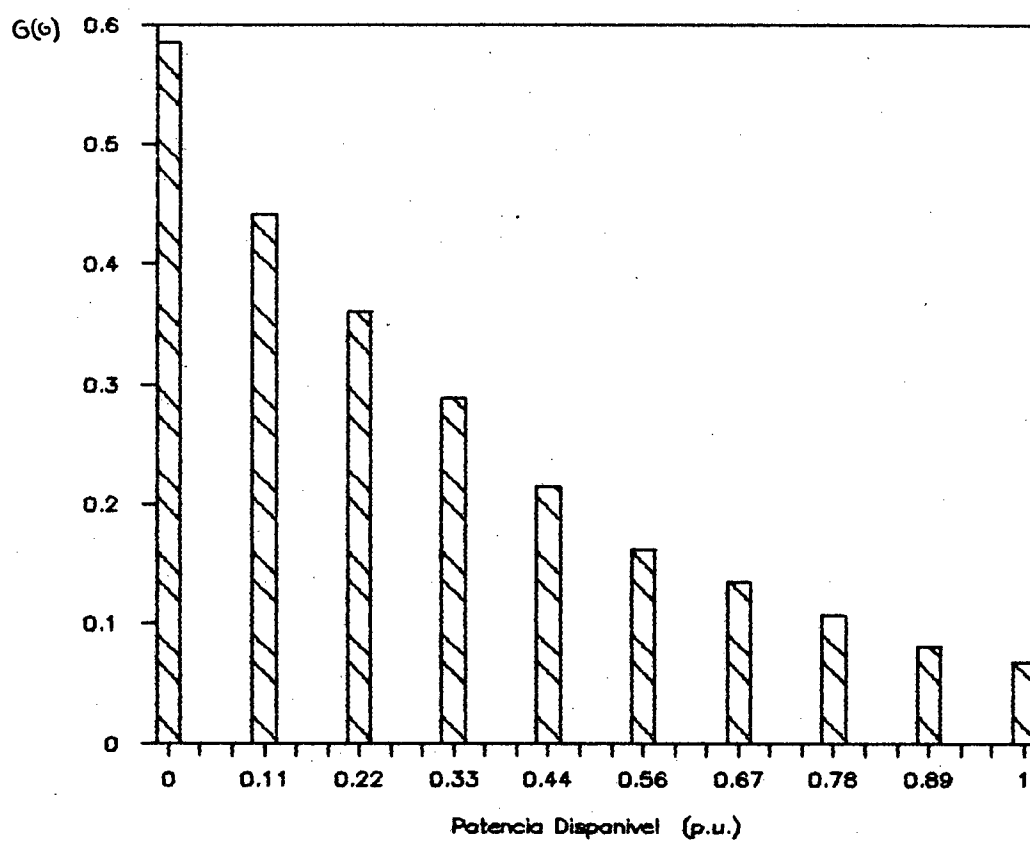


FIGURA 4-9. Curva cronológica típica da  
potência da demanda

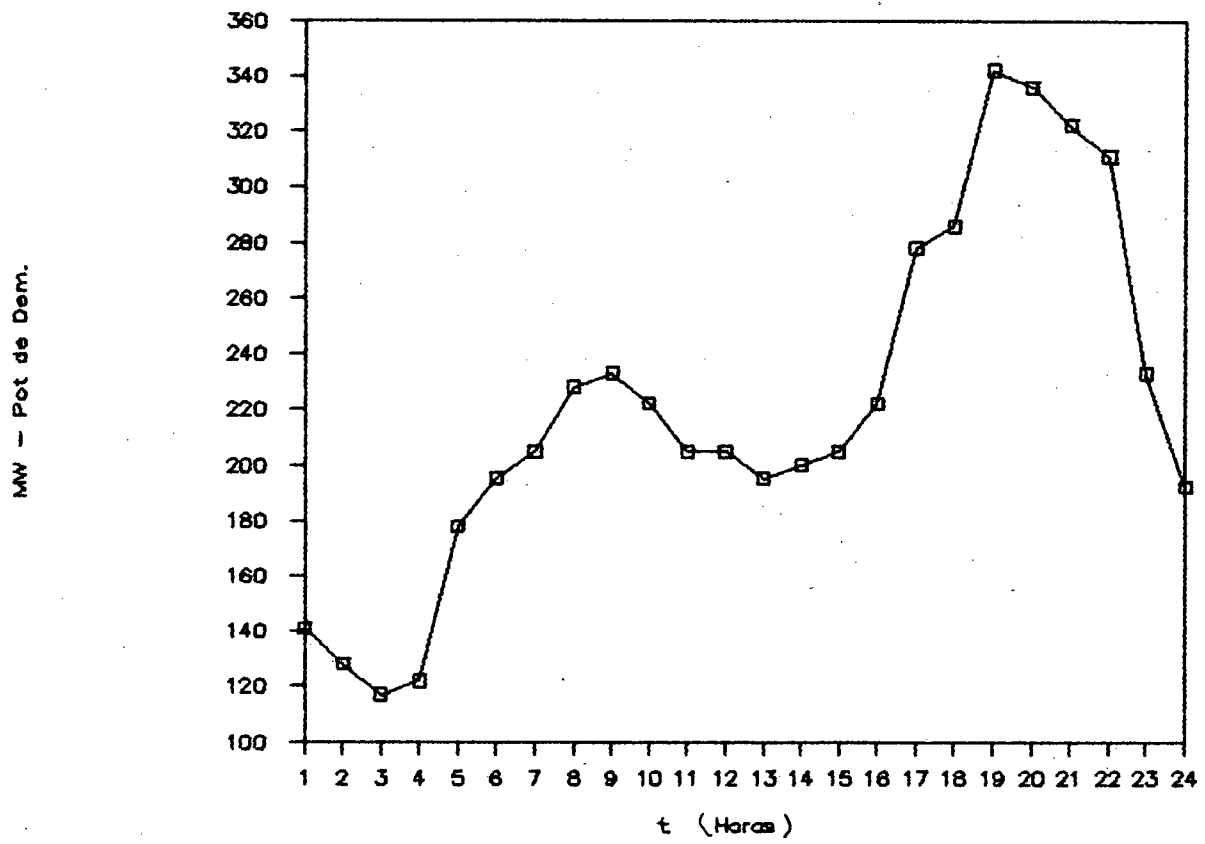
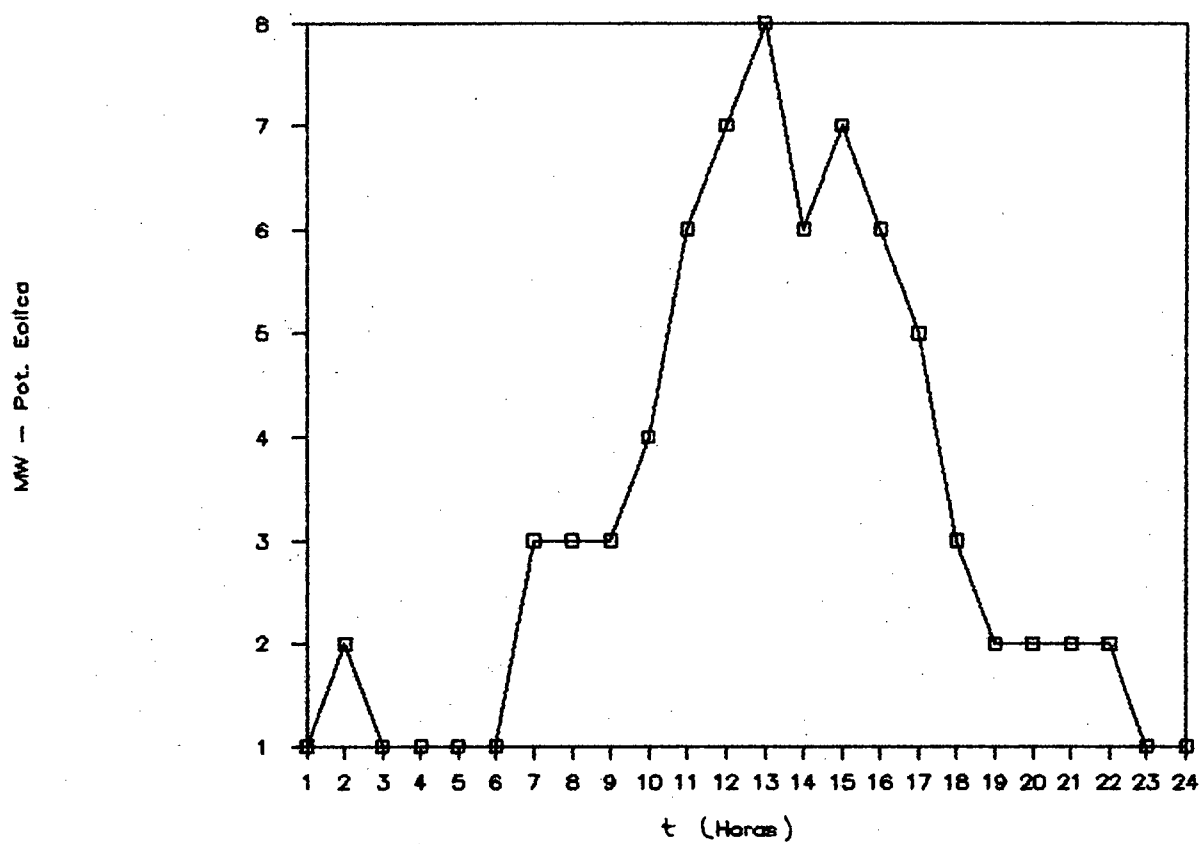


FIGURA 4-10. Curva cronológica típica de  
potência do vento



$$S = L - G \quad (4.7)$$

onde,  $L$  é a potência de demanda;  $G$  é a potência do sistema eólico.

Pode-se obter também a função distribuição  $F(S)$ ; a função de distribuição complementar  $G(S)$ , assim como a curva duração demanda da demanda não suprida pelo vento, conforme ilustrado nas Figuras 4-11, 4-12, 4-13 e 4-14 respectivamente. As Figuras 4-15 e 4-16 apresentam as curvas de duração de demanda do mês considerado e a curva duração de demanda não suprida pelo vento para as correlações entre a potência de demanda e potência do vento de 0.6 e -0.6 respectivamente, pode-se observar que quando a correlação é positiva o vento supre mais na ponta e na base quando a correlação é negativa.

#### 4.5. INTRODUÇÃO DO SISTEMA EÓLICO NO MODELO ESTOCÁSTICO DE PRODUÇÃO

Para avaliar os índices de confiabilidade e custo de produção do sistema com a inclusão de energia eólica se acrescentará ao sistema convencional (SC) inicialmente um sistema eólico (1F), posteriormente dois sistemas eólicos com correlação entre os mesmos de 0,5 (2F, 0.5), dois sistemas eólicos com correlação entre os mesmos de 0.7 (2F, 0.7) e dois sistemas eólicos com correlação nula (2F, 0.0). Os dados dos sistemas eólicos, potência e disponibilidade são ilustrados na Tabela 4-8, e os índices de confiabilidade resultantes, assim como o custo esperado de produção na Tabela 4-9.

FIGURA 4-11. Função densidade de potência de demanda  
não suprida pelo vento

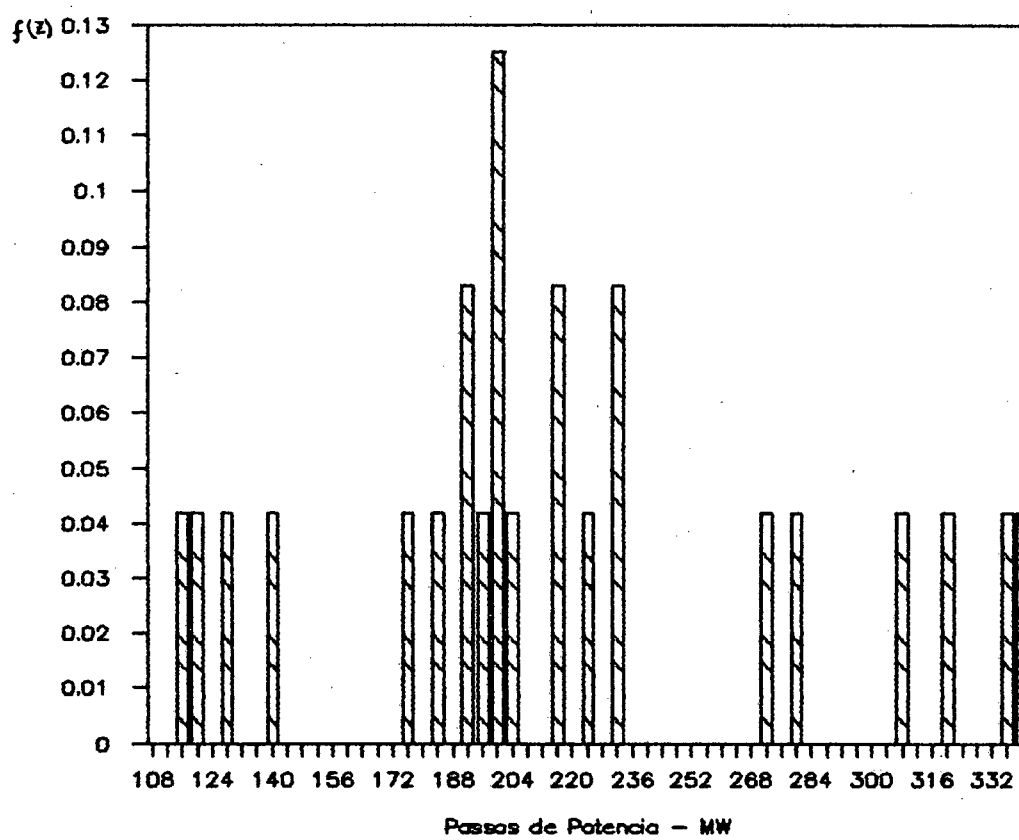


FIGURA 4-12. Função distribuição de potência de  
demanda não suprida pelo vento

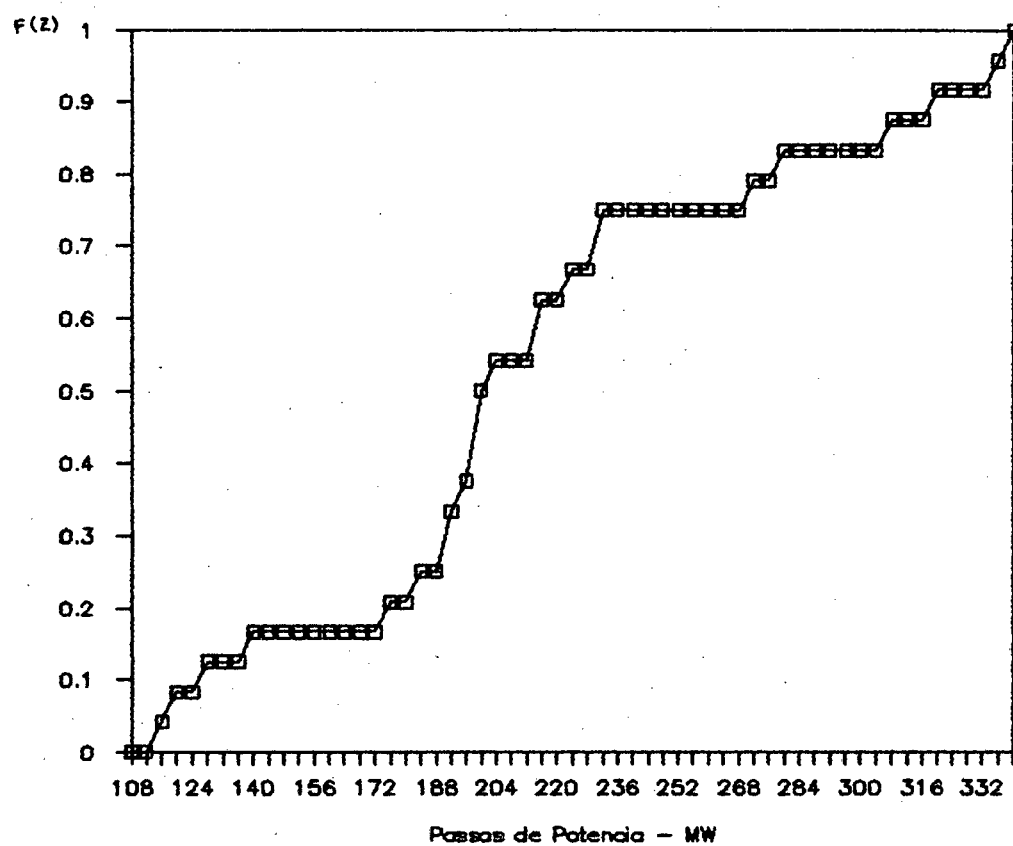




FIGURA 4-13. Função distribuição complementar de  
potência de demanda não suprida

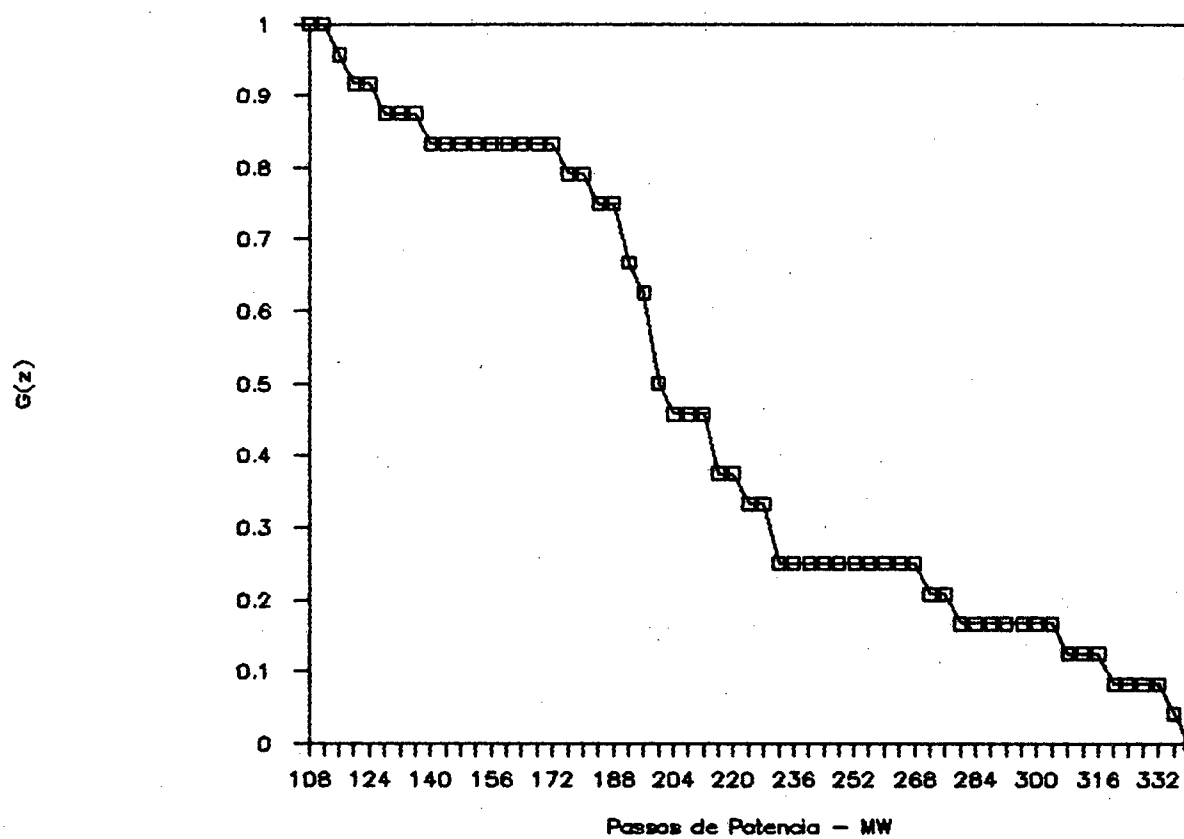


FIGURA 4-14. Curva duração de demanda de potência  
não suprida pelo vento

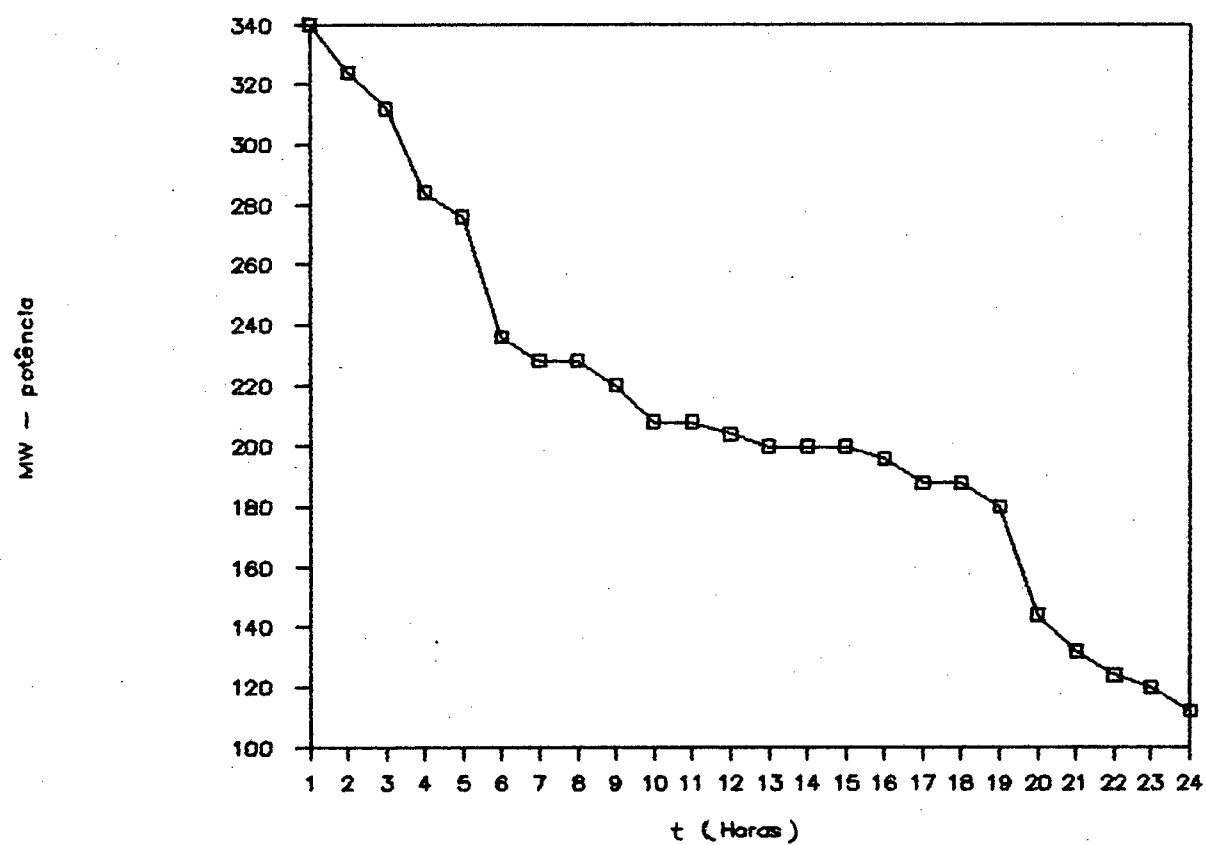


FIGURA 4-15. Curva duração de demanda  
correlação 0.6

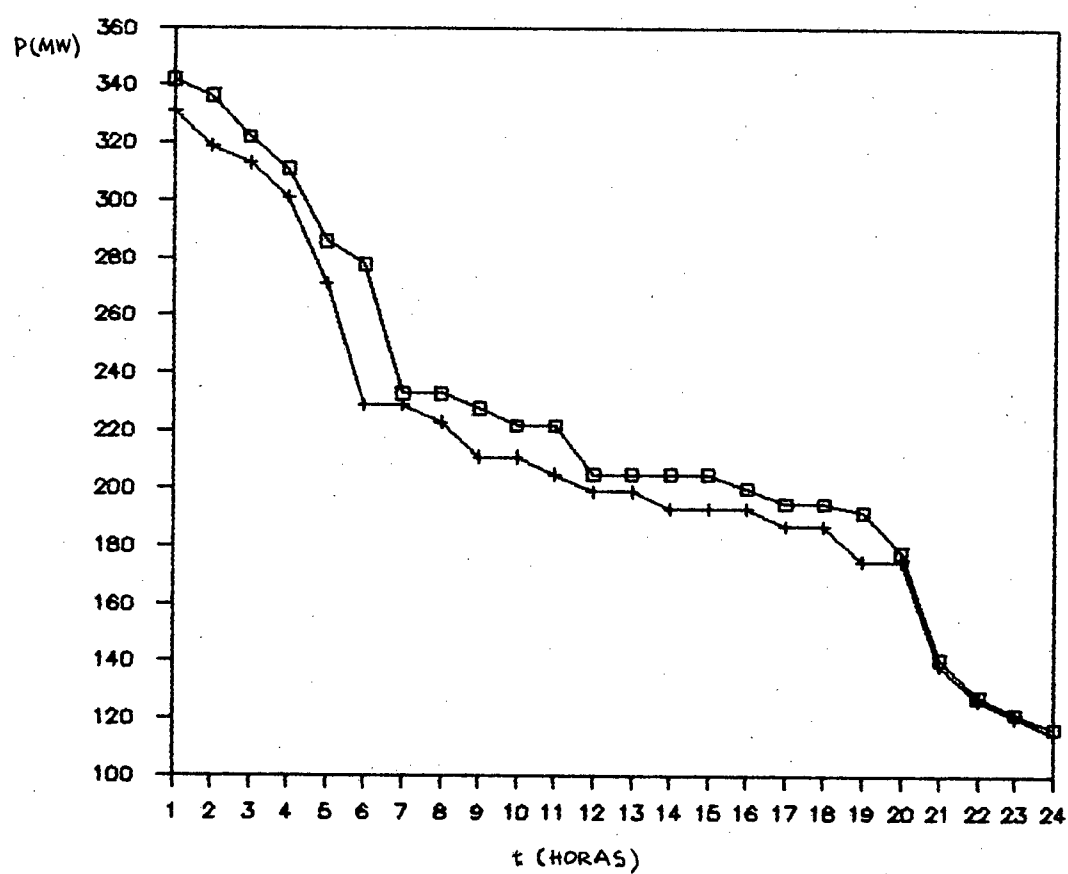


FIGURA 4-16. Curva duração de demanda  
correlação -0.6

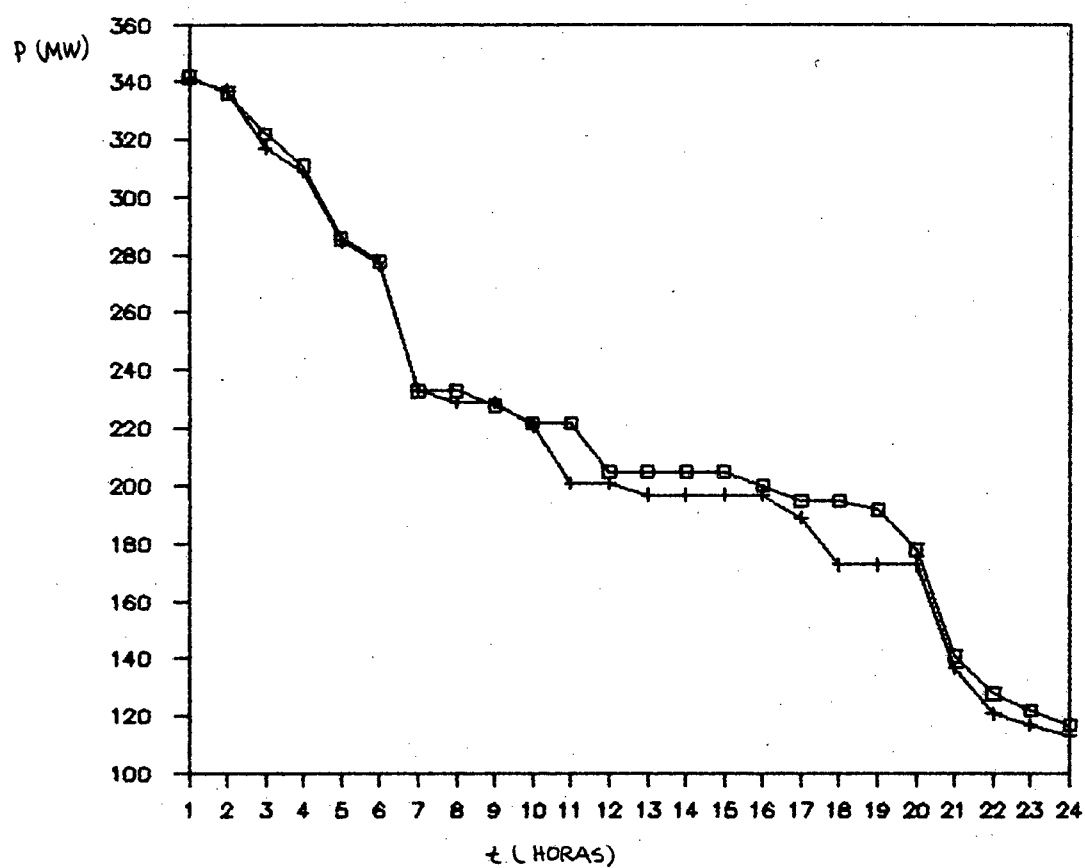


TABELA 4-8. Dados dos Sistemas Eólicos

IF			2F-.0	2F-.5	2F-.7
POT MW	DISP	POT MW	DISP	DISP	DISP
0	1	0	1	1	1
3	0.541	6	0.619	0.585	0.551
7	0.314	14	0.468	0.442	0.418
10	0.246	20	0.372	0.360	0.350
13	0.213	26	0.284	0.289	0.296
17	0.182	34	0.178	0.214	0.245
20	0.142	40	0.129	0.162	0.195
23	0.115	46	0.112	0.135	0.162
27	0.070	54	0.099	0.107	0.126
30	0.015	60	0.090	0.082	0.092

TABELA 4-9 - Variações dos índices de confiabilidade  
frente a variações da correlação entre  
sistemas eólicos

	ENERGIA DO VENTO MWH/mês	EENA MWH/mês	DEDNA dias/mês	CEPE $\times 10^7$
SC	-	22.795	0.05329	0.29338
1F	4380	14.575	0.04279	0.28757
2F,.7	11670	11.466	0.03525	0.27895
2F,.5	11370	11.152	0.03439	0.27919
2F,.0	11220	10.823	0.03348	0.27927

#### 4.5.1. REDUÇÃO DO CUSTO ESPERADO DE PRODUÇÃO DE ENERGIA

A redução do custo esperado de produção de energia quando se introduz um sistema eólico, conforme ilustrado na Tabela 4-3 da seção 4.2.4., e um sistema de energias convencionais, ilustrado no Apêndice A, no modelo estocástico de produção de energia é analisado pela redução relativa R, isto é:

$$R = \frac{C_{s_1} - C_{c_1}}{C_{s_1}}$$

onde  $C_{s_1}$  é o custo esperado de produção de energia convencional (sem vento),  $C_{c_1}$  é o custo esperado de produção de energia com vento, para os diferentes passos de discretização da potência no modelo estocástico de produção de energia, conforme ilustrado na Tabela 4-10.

TABELA 4-10 - Redução Relativa do Custo de Produção

Número de Passos	CEPE x 10 <sup>7</sup> Sem Vento	CEPE x 10 <sup>7</sup> Com Vento - 1F	Redução Relativa
40	0.29327	0.28705	0.0212
50	0.29338	0.28765	0.0195
60	0.29330	0.28732	0.0204
120	0.29323	0.28751	0.0195
140	0.29326	0.28757	0.0194

A redução relativa do custo de produção está em torno de 0,020 ou de 2,0% do custo esperado de produção da energia convencional.

#### 4.5.2 - CORRELAÇÃO DA POTÊNCIA EÓLICA COM A DEMANDA

A Tabela 4-11 apresenta as várias correlações entre potências de sistemas eólicos assim como a correlação do conjunto de sistemas eólicos e a demanda. Obtém-se para cada um dos casos os índices de confiabilidade assim como o custo esperado de produção de energia. Nesta tabela, a coluna (CORRF.1-2) mostra os índices de correlação entre a o sistema eólico 1 e 2, a coluna (CORR F. DEM) apresenta os índices de correlação entre a demanda e os sistemas eólicos.

TABELA 4-11.- Variação da Correlação Entre os  
Sistemas Eólicos e Demanda

CORR F. 1-2	CORR F. DEM.	ENERGIA DO VENTO -MWH	EENA MWH	DEDNA dias/mês	CEPE x 10 <sup>7</sup>
1	-0.314	16260	9.3072	0.02748	0.27207
-0.64	0.230		2.4190	0.00883	0.26668
0.53	0.528		2.1560	0.007597	0.27124
-0.15	0.311		3.7628	0.01179	0.27105
-0.51	0.321		3.5229	0.01136	0.27008

São apresentadas várias correlações entre potências de sistemas eólicos assim como a correlação do conjunto de fazendas e a demanda.

Observa-se que quando a correlação entre aproveitamentos eólicos e a demanda é negativa, ou seja, quando ha pouca incidência de vento em

períodos de alta demanda o custo de geração térmica é maior e justifica-se a preocupação em considerar a correlação de demanda com ventos de incidência periódica.

#### 4.6. ESTUDO DE SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS

##### 4.6.1. INTRODUÇÃO

O sistema de potência considerado para o estudo possui um parque com capacidade total instalada de 517 MW, para uma demanda máxima de 342 MW. Os dados adicionais da demanda e das turbinas aparecem no Apêndice A.

Avaliar-se-á a redução relativa do custo de produção de energia convencional com a introdução de energia alternativa, a sensibilidade à indisponibilidade forçada assim como a indisponibilidade por falta de vento.

##### 4.6.2. - SENSIBILIDADE À INDISPONIBILIDADE FORÇADA DAS UNIDADES EÓLICAS

A Tabela 4-12 ilustra os dados do sistemas eólico para as diferentes variações de taxa de indisponibilidade forçada. Os dados resultantes mostram o efeito da variação da taxa de saída forçada FOR frente ao custo esperado de produção de energia CEPE, duração esperada não atendida EENA e a energia eólica no sistema. Observa-se que a variação da energia eólica é aproximadamente 6 % menor com respeito ao sistema com menor taxa de indisponibilidade, conforme ilustra a Tabela 4-13.



**TABELA 4-12. Dados do Sistema Eólico frente a Variações da Taxa de Indisponibilidade**

FOR	5%	10%	15%	20%
POT MW	DISP	DISP	DISP	DISP
0	1	1	1	1
3	0.541	0.541	0.541	0.541
7	0.342	0.330	0.317	0.308
10	0.260	0.248	0.240	0.238
13	0.191	0.185	0.192	0.205
17	0.190	0.178	0.173	0.176
20	0.139	0.132	0.131	0.138
23	0.100	0.100	0.104	0.109
27	0.075	0.078	0.074	0.065
30	0.057	0.039	0.024	0.012

**TABELA 4-13 - Taxa de Saída Forçada  
Frente à Energia Eólica**

FOR %	ENERGIA DO VENTO MWH/dia	EENA MWH/mês	DEDNA dias/mês	CEPE $\times 10^7$
5	151	17.639	0.04825	0.28746
10	146	17.792	0.04866	0.28766
15	143	17.883	0.04890	0.28777
20	142	17.898	0.04893	0.28779

Os dados da energia eólica submetidos ao modelo estocástico de produção de energia para este exemplo foram os que se mostram na Tabela 3-1,

seção 3.4.1.

#### 4.6.3 - PROBABILIDADE DE INDISPONIBILIDADE POR FALTA DE VENTO

Para avaliar o aproveitamento de energia eólica se submete ao modelo estocástico de produção de energia duas diferentes turbinas. A primeira turbina "Ta" tem como limite "cut-in" 5,5; "cut-out" 27,5 e velocidade nominal 13.9 m/s, taxa de saída forçada 10%. A segunda turbina "Tb" tem como limites "cut-in" 5,0; "cut-out" 27,0 e velocidade nominal 13,51 m/s, com as demais características idênticas à anterior, conforme se ilustra na Tabela 3-1, seção 3.4.1.

A Tabela 4-14 ilustra os dados submetidos ao modelo estocástico de produção de energia de sistemas compostos pelos dois tipos de turbinas; a tabela 4-15 mostra os índices de confiabilidade, assim como a energia entregue ao sistema pelos sistemas das diferentes turbinas.

**TABELA 4-14.- Dados de Entrada ao MEPE**  
**dos Sistemas Eólicos para as**  
**Diferentes turbinas**

	Ta	Tb
POT MW	DISP	DISP
0	1	1
3	0.541	0.541
7	0.330	0.431
10	0.248	0.337
13	0.185	0.253
17	0.178	0.184
20	0.132	0.137
23	0.100	0.116
27	0.078	0.092
30	0.039	0.046

**TABELA 4-15.- Índices de Confiabilidade**  
**para as Diferentes Turbinas**

	ENERGIA DO VENTO-MWH/mês	EENA MWH/mês	DEDNA dias/mês	CEPE $\times 10^7$
Ta	4380	17.792	0.04866	0.28766
Tb	5130	16.877	0.04626	0.28669

TABELA 4.16 - Probabilidade de Indisponibilidade

Por Falta de Vento

	Ta	Tb
	Cut-in 5.5 m/s	Cut-in 5.0 m/s
$K_f$	0.355	0.254
$f_c$	0.2028	0.2375

A tabela 4-16 apresenta o índice  $K_f$ , probabilidade de indisponibilidade por falta de vento tanto da turbina "Ta" quanto da turbina "Tb" e " $f_c$ " o fator de capacidade. O índice " $K_f$ " é obtido da Tabela B-1 e  $f_c$  da Tabela 4-15.

Os resultados mostram que para um decréscimo de 0,5 m/s dos limites das unidades eólicas o aproveitamento da energia eólica é melhor em aproximadamente 10% para  $K_f$ , já o fator de capacidade  $f_c$  cresce em aproximadamente 3% quando se modifica a turbina.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES

Este trabalho visou apresentar um modelo de fontes não convencionais de energia, notadamente energia eólica, capaz de ser incorporado a um modelo estocástico de produção de energia para planejamento da expansão e operação.

O presente trabalho inicialmente descreveu o método para determinar os índices de confiabilidade tais como a duração esperada de demanda não atendida, energia esperada não atendida, assim como o custo esperado de produção de energia.

O modelo implementado considera em primeira instância a hipótese de independência da potência da demanda com a potência do vento. Para tal os dados obtidos da disponibilidade e potência do sistema eólico são submetidos ao modelo estocástico de produção de energia, como se fosse uma fonte convencional de energia de base, com custo de geração nulo. Neste sentido foi possível avaliar a correlação do vento entre dois sistemas eólicos a partir da função densidade conjunta Rayleigh.

Em regiões onde a correlação da potência de demanda e potência do

vento é elevada não se pode mais submeter diretamente o sistema eólico ao modelo estocástico de produção de energia. Para tal, tem-se um meio alternativo para avaliar melhor o desempenho da energia eólica que consiste em subtrair a potência eólica da potência correlata de demanda, obtendo-se assim a potência de demanda não suprida pelo sistema eólico. Esta demanda não suprida serve de dado de entrada ao modelo estocástico de produção de energia que a submete às fontes convencionais de energia.

As sugestões para futuros trabalhos são as seguintes:

- Expansão a outras fontes alternativas de funcionamentos semelhantes, como fontes fotovoltaicas.
- Uso de técnicas de cumulantes para substituir o procedimento de convolução discreta, tornando a solução mais rápida em sistemas de grande porte.
- Inclusão de outros sistemas de captação de vento com diferentes funções de conversão de energia como por exemplo turbina eólica de eixo vertical.
- Avaliação da relação custo/benefício para inclusão de fontes eólicas em sistemas convencionais.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. R. BOOTH. "Power System Simulation Model Based on Probability Analysis". IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, N. 1, Jan-Feb 1972, pp: 62-69.
- [2] H. BALERIAUX, E. JAMOULLE, Fr. LINARD DE GUERTECHIN. "Simulation de l'exploitation d'un Parc de Machines Thermiques de Production D'électricité Couplé à des Stations de pompage", Revue E. (Edition S. R. B. E.) Vol 5, No 7, July 1967.
- [3] K. J. SLATER, "Stochastic System Model", Ontario Hidro Report, 1972.
- [4] A. G. BAKIRTZIS, P. S. DOKOPOULOS, E. S. GAVANIDOW, M. A. KETSELIDES, "A Probabilistic Costin Method For The Evaluation of The Performance of Grid Conected Wind Arrays", IEEE Trans. on Energy Conversion, Vol Pas 102 No 1, March 1989.
- [5] P. GIORSETTO, K. F. UTSUROGI, "Development of a New Procedure For Reliability Modeling of Wind Turbine Generators", IEEE, T - PAS , Vol. Pas 102 No 1 , January 1983.

- [6] G. C. THOMANN, M. J. BARFIELD, "The Time Variations of Wind Speeds and Windfarm Power Output in Kansas". IEEE Trans on Energy Conversion, Vol. 3, N. 1, March 1988.
- [7] K. C. CHOU, B. ROSS COROTIS. "Simulation of Hourly Wind Speed and Array Wind Power". Solar Energy, Vol. 26, pp: 199, 1981.
- [8] W. R. POWEL. "An Analytical Expression for the Average Output Power of a Wind Machine". Solar Energy, Vol. 26, pp: 77, 1980.
- [9] C. L. HELSTROM. "Probability and Stochastic Processes For Engineers". MacMillan Publishing Company, 1984.
- [10] A. PAPOULIS, "Probability, Random Variables, and stochastics processes, New York, Mc Graw Hill, 1965.
- [11] H. H. ZÜRN, "Dinamic Generator Maintenance Scheduling for Optimal Planned Power Systemm Operation" UNIVERSITY OF WATERLOO, Dep. of Electrical Engineering, Internal Report UWEE 76-1, 1976.
- [12] A. B. CLARKE, "Probabilidade e Processos Estocásticos", LTC/1979
- [13] C. C. B. CAMARGO, "Confiabilidade Aplicada a Sistemas de Potência Elétrica", LTC/FEESC, 1981.
- [14] H. N. COELHO, "Avaliação da Confiabilidade e Custo de geração de um Sistema de Potência com Imposição de Restrições de Potência e Energia",



Dissertação de Mestrado/UFSC, 1979.

## APÊNDICE A

### DADOS DO SISTEMA DE POTÊNCIA

#### A.1. DADOS DO SISTEMA DE POTÊNCIA

A Tabela A-1 ilustra para cada unidade térmica, composta de unidades térmicas a gás e óleo diesel, suas especificações tais como: os segmentos de potência de disponibilidade, custo de combustível e a potência mínima de saída de cada unidade. Estes dados de entrada serão modificados segundo as necessidades do sistema.

#### A.2. DADOS DA DEMANDA

A Tabela A-2 ilustra os dados da demanda para um dia padrão de um mês típico, sendo o mês de junho de máxima demanda no sistema considerado, o qual foi o mês base dos exemplos, além do mês de Junho se exemplifica os meses de Janeiro e Setembro.

### A.3. SAÍDAS DO MODELO ESTOCÁSTICO

Nas Tabelas A-3 a A-5 se ilustram as listagens de saída do modelo estocástico de produção de energia para os seguintes casos:

- Saída do modelo estocástico de produção de energia considerando só energia convencional, ilustrado na tabela A-3.
- Saída do modelo estocástico de produção de energia considerando no sistema convencionalum sistema eólico com a hipótese da independência da potência de demanda com a potência do vento, conforme ilustrado na tabela A-4.
- Saída do modelo estocástico de produção de energia considerando a correlação da potência de demanda com a potência eólica de um sistema, conforme ilustrado na tabela A-5.

**TABELA A-1.- Dados do Sistema de Potência**

UNIT TYPE 1

MN	0	5	10	15	20	26	0	0	0	0
AVAIL	1.0000	0.9290	0.8860	0.8720	0.8500	0.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
MIN	0	I/O	0.3125081E+03	0.7089000E+01	0.4200001E-03	COST	0.5720	PCOST	0.5720	

UNIT 1	TITLE	GUARA 1	SUNS	1 0 0 0 0 0 0 0 0
UNIT STATES	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5			

UNIT 2	TITLE	GUARA 2	SUNS	1 0 0 0 0 0 0 0 0
UNIT STATES	5 5 5 5 5 5 5 5 5			

UNIT TYPE 2

```

NN      0  4  9 14 18 22  0  0  0  0
AVAIL 1.0000 0.9290 0.8860 0.8720 0.8500 0.8000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
MIN      0      I/O      0.3125001E+03 0.7889000E+01 0.4200001E-03      COST 0.5720 PCOST 0.5720

```

UNIT 3 TITLE GUARA 3 SONS 1000000000  
UNIT STATES 555555555555

UNIT 4 TITLE GUARA 4 SONS 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

UNIT 5 TITLE GUARA 5 SUNS 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

UNIT 6	TITLE	GUARA 6	SUNS	1 0 0 0 0 0 0 0 0
UNIT STATES	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5			

UNIT TYPE 3

```
NN      0   18   20   30   0   0   0   0   0   0  
AVAIL  1.0000 0.8740 0.8120 0.7660 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
MIN     0       I/O    0.2352180E+03 0.6780000E+01 0.3877900E-02 COST 0.5940 PCOST 0.5940
```

```
UNIT 7      TITLE  GUARA 7      SUNS  1 2 0 0 0 0 0 0 0 0
UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

UNIT TYPE 4

NR	0	5	10	16	0	0	0	0	0	0
AVAIL	1.0000	0.8440	0.7920	0.7660	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
MIR	0	I/O	0.1000000E+01	0.1000000E+01	0.0000000E+00	COST	29.5700	PCOST	29.5700	

```
UNIT 8      TITLE  KRCHI 1      SUNS  1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
UNIT STATES 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
```

## UNIT TYPE 5

NW 0 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 AVAIL 1.0000 0.8450 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
 MIN 0 I/O 0.2012500E+03 0.7186000E+01 0.6734698E-02 COST 0.6050 PCOST 0.6050

UNIT 9 TITLE ARANJ 1 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

UNIT 10 TITLE ARANJ 2 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

UNIT 11 TITLE ARANJ 4 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

UNIT 12 TITLE ARANJ 4 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

UNIT 13 TITLE ARANJ 5 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

UNIT 14 TITLE ARANJ 6 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

UNIT 15 TITLE CANAR 1 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

## UNIT TYPE 6

NW 0 3 6 0 0 0 0 0 0 0 0  
 AVAIL 1.0000 0.9400 0.8500 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
 MIN 4 I/O 0.1245600E+03 0.8387000E+01 0.7428001E-03 COST 0.5940 PCOST 0.5940

UNIT 16 TITLE V.AVA 1 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

UNIT 17 TITLE V.NON 1 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

## UNIT TYPE 7

NW 0 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
 AVAIL 1.0000 0.8750 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
 MIN 0 I/O 0.2352100E+03 0.6780000E+01 0.3877900E-02 COST 0.5940 PCOST 0.5940

UNIT 18 TITLE TRINI 1 SUNS 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

## UNIT TYPE 8

NW 0 5 10 15 20 25 0 0 0 0 0  
 AVAIL 1.0000 0.9290 0.8860 0.8720 0.8500 0.8000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
 MIN 0 I/O 0.3125001E+03 0.7980000E+01 0.4209001E-03 COST 0.5720 PCOST 0.5720

UNIT 19 TITLE CORAN 1 SUNS 1 2 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

UNIT 20 TITLE CORAN 2 SUNS 1 2 0 0 0 0 0 0 0  
 UNIT STATES 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

UNIT 21 TITLE CORAN 3 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

UNIT 22 TITLE CORAN 4 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 5 5 5 5 5 5 5 5 5 4

UNIT 23 TITLE CORAN 5 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5

UNIT TYPE 9

NW 0 4 8 12 16 0 0 0 0 0 0  
AVAIL 1.0000 0.9290 0.8860 0.8720 0.8500 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
MIN 0 I/O 0.3135081E+03 0.7389000E+01 0.5208999E-03 COST 0.5720 PCOST 0.5720

UNIT 24 TITLE SISAB 1 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

UNIT 25 TITLE SISAB 2 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

UNIT 26 TITLE SISAB 3 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

UNIT 27 TITLE SISAB 4 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

UNIT TYPE 10

NW 0 4 8 12 16 0 0 0 0 0 0  
AVAIL 1.0000 0.9000 0.8160 0.7520 0.7150 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
MIN 0 I/O 0.1235600E+03 0.8337000E+01 0.5427999E-03 COST 0.5940 PCOST 0.5940

UNIT 28 TITLE CAHUA 1 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

UNIT 29 TITLE CAHUA 2 SUMS 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

UNIT 30 TITLE MARCA 1 SUMS 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

UNIT 31 TITLE MARCA 2 SUMS 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4

UNIT TYPE 11

NW 0 4 8 12 16 0 0 0 0 0 0  
AVAIL 1.0000 0.9290 0.8860 0.8720 0.8500 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
MIN 0 I/O 0.2352180E+03 0.6780000E+01 0.3877900E-02 COST 0.5940 PCOST 0.5940

UNIT 32 TITLE ZONGO 1 SUMS 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0  
UNIT STATES 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

- Dados de Potência e Disponibilidade do Sistema Eólico

POT-MW	0	3	7	10	13	17	20	23	27	30
--------	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

DISP	1.0000	0.5410	0.3140	0.2460	0.2130	0.1820	0.1420	0.1150	0.0700	0.0150
------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

TABELA A-2. - Tabela de Duração de Demanda

## DIA TIPICO MENSAL

Duração Hora	Demanda Janeiro	Demanda Junho	Demanda Setemb.
1	300.	342	318
2	295.	336	313
3	283.	322	300
4	273.	311	290
5	251.	286	267
6	244.	278	259
7	205.	233	217
8	205.	233	217
9	200.	228	213
10	195.	222	207
11	195.	222	207
12	180.	205	191
13	180.	205	191
14	180.	205	191
15	180.	205	191
16	176.	200	186
17	171.	195	182
18	171.	195	182
19	169.	192	179
20	156.	178	166
21	124.	141	131
22	112.	128	119
23	107.	122	114
24	103.	117	109



**TABELA A-3.- Saída Do Modelo Estocástico Considerando Energia convencional**

0 : STEPS 50.

( MAXIMUM 400 )

```
0      :PRINT      2
```

( 1 = SUMMARY 2 = DETAIL )

INITIAL PERIOD: 6. FINAL PERIOD: 6

STORED INPUT DATA IS AVAILABLE FROM PERIOD 1 TO PERIOD 12

**0 LIMIT ON PROBABILITY OF LOSS OF LOAD...PLOL= 0.300 FRACTION OF A DAY**

**PURCHASE COST FOR UNSUPPLIED ENERGY IN \$/MWH = 0.40000000E+02**

DETAILED PRINTOUT FOR FOLLOWING PERIODS:

6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

+++ NO LOAD CHANGES

+++ NO AVAILABILITY CHANGES

\*\*\*\*\* JUNE 1 1989

[illegible]



## 1\*\*\*\*\* YEARLY SUMMARY

JUNE 1 1989

GAS	MWH	0.13360E+06	0.13360E+06
	\$	0.21178E+07	0.21178E+07
DIESEL	MWH	0.10866E+06	0.10866E+06
	\$	0.20592E+07	0.20592E+07

UNSUPPLIED	MWH	0.22795E+02	0.22795E+02
------------	-----	-------------	-------------

PROB OF FAILURE	0.5329E-01	0.5329E-01
-----------------	------------	------------

MAX. UNMET DEMAND	0.43756E+03
-------------------	-------------

MIN. RESERVE MW	0.13700E+03
-----------------	-------------

MIN. REL. RESERVE	0.40058E+00
-------------------	-------------

TOTAL ENERGY	MWH	0.15832E+06
--------------	-----	-------------

TOTAL COST	\$	0.29329E+07
------------	----	-------------

PURCHASED ENERGY COST:	0.91182E+03
------------------------	-------------

TOTAL REQUIRED ENERGY:	0.15834E+06
------------------------	-------------

GLOBAL COST:	0.29338E+07
--------------	-------------

**TABELA A-4.- Saída do Modelo Estocástico  
Considerando um Sistema Elíptico**

:STEPS 50.

( MAXIMUM 400 )

```

6      :PRINT      2

```

( 1 = SUMMARY 2 = DETAIL )

INITIAL PERIOD: 6. FINAL PERIOD: 6

STORING INPUT DATA IS AVAILABLE FROM PERIOD 1 TO PERIOD 12

0 LIMIT ON PROBABILITY OF LOSS OF LOAD...PLOL= 0.300 FRACTION OF A DAY

PURCHASE COST FOR UNSUPPLIED ENERGY IN \$/MWH = 0.4000000E+02

DETAILED PRINTOUT FOR FOLLOWING PERIODS:

6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

+++ NO LOAD CHANGES

+++ NO AVAILABILITY CHANGES

\*\*\*\*\* JUNE 1 1989

			WEEKDAY									
UNIT	TITLE	ENERGY	STAGE PROBABILITIES									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	GUARA	1	49.	0.12E+00	0.10E+00	0.10E+00	0.86E-01	0.73E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.10E+00	0.10E+00	0.86E-01	0.73E-01	0.61E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
2	GUARA	2	24.	0.61E-01	0.62E-01	0.50E-01	0.40E-01	0.31E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.62E-01	0.50E-01	0.40E-01	0.31E-01	0.33E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
3	GUARA	3	349.	0.96E+00	0.87E+00	0.83E+00	0.67E+00	0.46E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.94E+00	0.86E+00	0.81E+00	0.67E+00	0.47E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
4	GUARA	4	339.	0.94E+00	0.86E+00	0.81E+00	0.67E+00	0.47E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.94E+00	0.85E+00	0.79E+00	0.62E+00	0.42E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
5	GUARA	5	333.	0.94E+00	0.85E+00	0.79E+00	0.62E+00	0.42E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.92E+00	0.85E+00	0.76E+00	0.56E+00	0.43E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
6	GUARA	6	323.	0.92E+00	0.85E+00	0.76E+00	0.56E+00	0.43E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.89E+00	0.84E+00	0.76E+00	0.57E+00	0.39E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
7	GUARA	7	210.	0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
8	KRCHI	1	96.	0.00E+00	0.00E+00	0.37E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.00E+00	0.00E+00	0.29E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
9	ARANJ	1	81.	0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.99E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
10	ARANJ	2	81.	0.99E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.99E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
11	ARANJ	4	80.	0.99E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.99E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
12	ARANJ	4	80.	0.99E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
				0.98E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
13	ARANJ	5	79.	0.98E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00



## 1\*\*\*\*\* YEARLY SUMMARY

JUNE 1 1989

GAS	MWH	0.13068E+06	0.13068E+06
	\$	0.20840E+07	0.20840E+07
DIESEL	MWH	0.10715E+06	0.10715E+06
	\$	0.20376E+07	0.20376E+07
WIND	MWH	0.31179E+04	0.31179E+04
	\$	0.00000E+00	0.00000E+00

UNSUPPLIED MWH 0.19608E+02 0.19608E+02

PROB OF FAILURE 0.5330E-01 0.5330E-01

MAX. UNMET DEMAND 0.44176E+03

MIN. RESERVE MW 0.16700E+03

MIN. REL. RESERVE 0.46830E+00

TOTAL ENERGY MWH 0.15832E+06

TOTAL COST \$ 0.28919E+07

PURCHASED ENERGY COST: 0.78431E+03

TOTAL REQUIRED ENERGY: 0.15834E+06

GLOBAL COST: 0.28927E+07







## 1\*\*\*\*\* YEARLY SUMMARY

JUNE 1 1989

GAS	MWH	0.13024E+06	0.13024E+06
	\$	0.20849E+07	0.20849E+07
DIESEL	MWH	0.10709E+06	0.10709E+06
	\$	0.20447E+07	0.20447E+07

UNSUPPLIED	MWH	0.21172E+02	0.21172E+02
------------	-----	-------------	-------------

PROB OF FAILURE		0.5825E-01	0.5825E-01
-----------------	--	------------	------------

MAX. UNMET DEMAND 0.43220E+03

MIN. RESERVE MW 0.13900E+03

MIN. REL. RESERVE 0.40882E+00

TOTAL ENERGY MWH 0.15493E+06

TOTAL COST \$ 0.28995E+07

PURCHASED ENERGY COST: 0.84687E+03

TOTAL REQUIRED ENERGY: 0.15495E+06

GLOBAL COST: 0.29003E+07

## APÊNDICE B

### FUNÇÕES E APLICAÇÕES USUAIS

#### B.1 - ALGUMAS FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE UTILIZADAS NESTE TRABALHO

##### FUNÇÃO DENSIDADE DE WEIBULL

$$f(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^{\beta}) \quad x > 0$$

$$\alpha, \beta > 0$$

$$\alpha \beta = \left[ \frac{1}{\alpha} \right]^{\beta}$$

Para  $\beta = 2$  recai-se na função Rayleigh.

FUNÇÃO DENSIDADE DE RAYLEIGH

$$f(x) = \frac{x}{\alpha^2} \exp \left[ -x^2/2 \alpha^2 \right] \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ \alpha > 0 \end{array}$$

Se duas variáveis aleatórias X e Y são normais, independentes com média nula e igual variância, a função

$$Z^2 = X^2 + Y^2$$

tem a função densidade Rayleigh, [10]

EXEMPLO: Para o fator de escala  $\alpha = 5,842$  a função densidade Rayleigh é mostrada na Tabela B-1.

TABELA B-1 Função densidade Rayleigh

X	f(X)	F(X)
1.000	.029	.029
2.000	.055	.084
3.000	.077	.161
4.000	.093	.254
5.000	.102	.355
6.000	.104	.459
7.000	.100	.559
8.000	.092	.651
9.000	.080	.732
10.000	.068	.799
11.000	.055	.854
12.000	.043	.897
13.000	.032	.929
14.000	.023	.952
15.000	.016	.968
16.000	.011	.979
17.000	.007	.986
18.000	.005	.991
19.000	.003	.994
20.000	.002	.995
21.000	.001	.996
22.000	.001	.997
23.000	.000	.997
24.000	.000	.997
25.000	.000	.997
26.000	.000	.998
27.000	.000	.998

FUNÇÃO RAYLEIGH BIVARIADA

$$f(x, y) = \frac{X Y}{\alpha_1^2 \alpha_2^2 (1-r^2)} \exp \left[ - \frac{1}{2(1-r^2)} \left( \frac{X^2}{\alpha_1^2} + \frac{Y^2}{\alpha_1^2} \right) \right] I_0 \left[ \frac{r x y}{\alpha_1 \alpha_2 (1-r)^2} \right]$$

EXEMPLO. - O fator de escala para ambas variáveis é igual a 5.842, com uma correlação igual a 0.5, conforme ilustrado na tabela B-2 a função de probabilidade conjunta Rayleigh, a qual é uma matriz 17 x 20.



### FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$p + q = 1$$

### B.2 - OPERAÇÕES COM VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

#### SOMA DE VARIÁVEIS ALEATORIAS

$$Z = X + Y$$

Densidade na Forma Contínua:

$$f_z(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(Z - Y, Y) dy$$

Na Forma Discreta:

$$p_z(Z) = \sum_y p_{x,y}(Z - Y, Y)$$

Se  $X$  e  $Y$  forem independentes:

$$f_z(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(Z - Y) f_y(y) dy$$

integral de convolução

Na Forma Discreta:

$$p_z(Z) = \sum_y p_x(Z - Y) p_y(Y)$$

Exemplo: Seja a função densidade conjunta, ilustrado na Tabela A-1.

TABELA B-1 - Função Probabilidade Conjunta

com  $x$  e  $y$  independentes.

	$P_{y_1}$	$P_{y_2}$	$P_{y_3}$	$P_{y_4}$
$P_{x_1}$	$P_{x_1} P_{y_1}$	$P_{x_1} P_{y_2}$	$P_{x_1} P_{y_3}$	$P_{x_1} P_{y_4}$
$P_{x_2}$	$P_{x_2} P_{y_1}$	$P_{x_2} P_{y_2}$	$P_{x_2} P_{y_3}$	$P_{x_2} P_{y_4}$
$P_{x_3}$	$P_{x_3} P_{y_1}$	$P_{x_3} P_{y_2}$	$P_{x_3} P_{y_3}$	$P_{x_3} P_{y_4}$
$P_{x_4}$	$P_{x_4} P_{y_1}$	$P_{x_4} P_{y_2}$	$P_{x_4} P_{y_3}$	$P_{x_4} P_{y_4}$

$$Z = X + Y$$

$$p_{z_1} = p_{x_1} p_{y_1}$$



$$p_{z_2} = p_{x_2} p_{y_1} + p_{x_1} p_{y_2}$$

$$p_{z_3} = p_{x_3} p_{y_1} + p_{x_2} p_{y_2} + p_{x_1} p_{y_3}$$

·  
·  
·

onde  $P_{z_1}$  é a função de probabilidade da soma das variáveis aleatórias X e Y.

### DIFERENÇA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

$$w = X - Y$$

Densidade na Forma Contínua:

$$f_w(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(w - y, -y) dy$$

Na Forma Discreta:

$$p_w(w) = \sum_y p_{x-y}(w - y, -y)$$

Se X e Y forem independentes:

$$f_w(W) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(W - Y) f_y(-y)$$

Na Forma Discreta:

$$p_w(W) = \sum_y p_x(W - Y) p_y(-Y)$$

EXEMPLO:

Seja a função densidade conjunta ilustrada na Tabela A-1, onde:

$$W = X - Y$$

$$p_{w_1} = p_{x_4} p_{y_1}$$

$$p_{w_2} = p_{x_4} p_{y_2} + p_{x_3} p_{y_1}$$

$$p_{w_3} = p_{x_4} p_{y_3} + p_{x_3} p_{y_2} + p_{x_2} p_{y_1}$$

...

onde  $p_{w_1}$  é a função de probabilidade da diferença das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ .

#### PRODUTO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

$$Z = X Y$$

Densidade na Forma Contínua:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{xy} \left( x, \frac{z}{x} \right) dx$$

Na Forma Discreta:

$$p_z(z) = \sum p_{xy} \left( x, \frac{z}{x} \right)$$

Se X e Y forem independentes:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_x(x) f_y \left( \frac{z}{x} \right) dx$$

Na Forma Discreta:

$$p_z(z) = \sum_x p_x(x) p_y \left( \frac{z}{x} \right)$$

EXEMPLO:

Z	P <sub>x</sub> (X)	P <sub>y</sub> (Y)
0	P <sub>x</sub> (0)	P <sub>y</sub> (0)
1	P <sub>x</sub> (1)	P <sub>y</sub> (1)
2	P <sub>x</sub> (2)	P <sub>y</sub> (2)
3	P <sub>x</sub> (3)	P <sub>y</sub> (3)
4	P <sub>x</sub> (4)	P <sub>y</sub> (4)

$$Z = X \cdot Y$$

$$p_Z(Z) = \sum_{x=0}^4 p_x(X) \cdot p\left(\frac{Z}{X}\right)$$

$$p_Z(0) = p_x(0) p_y\left(\frac{0}{0}\right) + p_x(1) p_y\left(\frac{0}{1}\right) + p_x(2) p_y\left(\frac{0}{2}\right) + p_x(3) p_y\left(\frac{0}{3}\right) + p_x(4) p_y\left(\frac{0}{4}\right)$$

$$p_Z(1) = p_x(0) p_y\left(\frac{1}{0}\right) + p_x(1) p_y\left(\frac{1}{1}\right) + p_x(2) p_y\left(\frac{1}{2}\right) + p_x(3) p_y\left(\frac{1}{3}\right) + p_x(4) p_y\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$p_Z(2) = p_x(0) p_y\left(\frac{2}{0}\right) + p_x(1) p_y\left(\frac{2}{1}\right) + p_x(2) p_y\left(\frac{2}{2}\right) + p_x(3) p_y\left(\frac{2}{3}\right) + p_x(4) p_y\left(\frac{2}{4}\right)$$

$$p_Z(3) = p_x(0) p_y\left(\frac{3}{0}\right) + p_x(1) p_y\left(\frac{3}{1}\right) + p_x(2) p_y\left(\frac{3}{2}\right) + p_x(3) p_y\left(\frac{3}{3}\right) + p_x(4) p_y\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$p_z^{(4)} = p_x^{(0)} p_y^{(4)} + p_x^{(1)} p_y^{(3)} + p_x^{(2)} p_y^{(2)} + p_x^{(3)} p_y^{(1)} + p_x^{(4)} p_y^{(0)}$$